

# Baseband Digital Transmission

Tito Maulana, 31475-TE  
Jurusan Teknik Elektro FT UGM,  
Yogyakarta

## 5.1 Preview

Pada bahasan kali ini, dibicarakan tentang beberapa teknik modulasi dan demodulasi digital bidang dasar untuk mentransmisikan informasi digital melalui kanal yang mempunyai Additive White Gaussian Noise. Kita mendeskripsikan penerima optimum untuk beberapa sinyal dan mempertimbangkan evaluasi dari performa mereka dalam hal rata-rata peluang munculnya galat.

## 5.2 Binary Signal Transmission

Dalam system komunikasi biner, binary data terdiri dari deretan angka 0 dan 1 yang dikirim dalam dua bentuk gelombang, yaitu  $s_0(t)$  dan  $s_1(t)$ . Data rate didefinisikan dalam  $R$  bits per second. masing-masing bit dipetakan ke dalam satu bentuk sinyal gelombang bersesuaian menurut aturan

$$0 \rightarrow s_0(t), 0 \leq t \leq T_b$$

$$1 \rightarrow s_1(t), 0 \leq t \leq T_b$$

Dimana  $T_b = 1 / R$  yang didefinisikan sebagai waktu interval bit. Kita mengasumsikan bit data 0 dan bit data 1 mempunyai peluang kemunculan yang sama yaitu  $1/2$  dan secara statistik independen.

Kanal tempat berlangsungnya transmisi diasumsikan menambah noise ke sinyal dengan fungsi  $n(t)$  yang merupakan bagian dari fungsi proses whit Gaussian dengan spektrum daya  $N_0/2$  W/Hz. Kanal ini disebut kanal *additive white Gaussian noise (AWGN)*. Sinyal diterima dapat diekspresikan sebagai berikut :

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad i = 0, 1, \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (5.2.1)$$

Tugas dari penerima untuk membedakan mana yang 0 atau 1 yang ditransmisikan setelah memeriksa sinyal diterima  $r(t)$  pada interval  $0 \leq t \leq T_b$ . Penerima didesain untuk meminimalkan peluang munculnya eror. Penerima ini dapat disebut penerima optimum.

### 5.2.1 Optimum Receiver for the AWGN Channel

Penerima optimum untuk kanal AWGN terdiri dari 2 blok utama. Blok pertama yaitu *signal correlator* atau *matched filter*. Blok lain yaitu *detector*.

## Korelator Sinyal

Korelator sinyal mengkorelasikan silang sinyal terima  $r(t)$  dengan 2 sinyal yang mungkin diterima yaitu  $s_0(t)$  dan  $s_1(t)$ , seperti yang diilustrasikan pada gambar 5.1. Korelator sinyal menghitung 2 keluaran

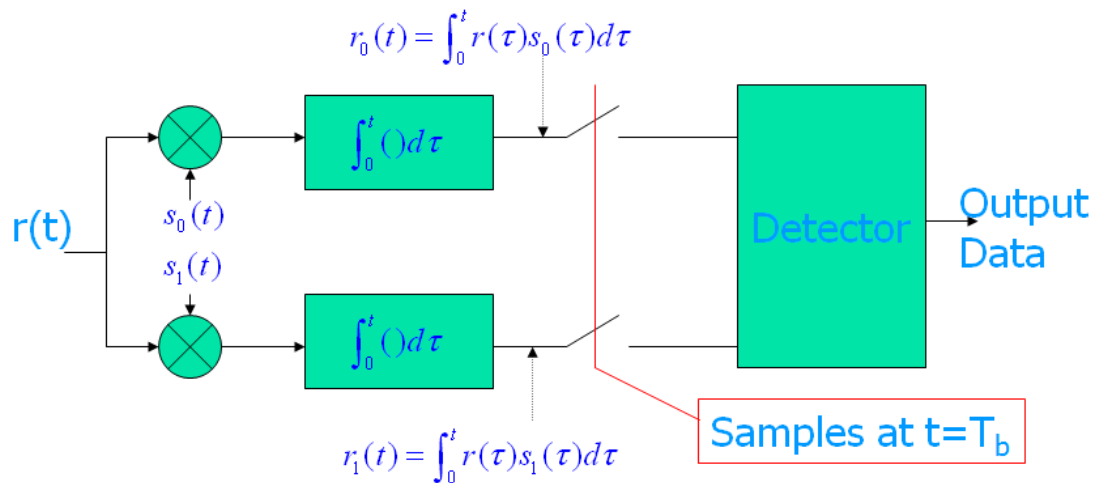
$$r_0(t) = \int_0^{T_b} r(\tau) s_0(\tau) d\tau$$

$$r_1(t) = \int_0^{T_b} r(\tau) s_1(\tau) d\tau \quad (5.2.2)$$

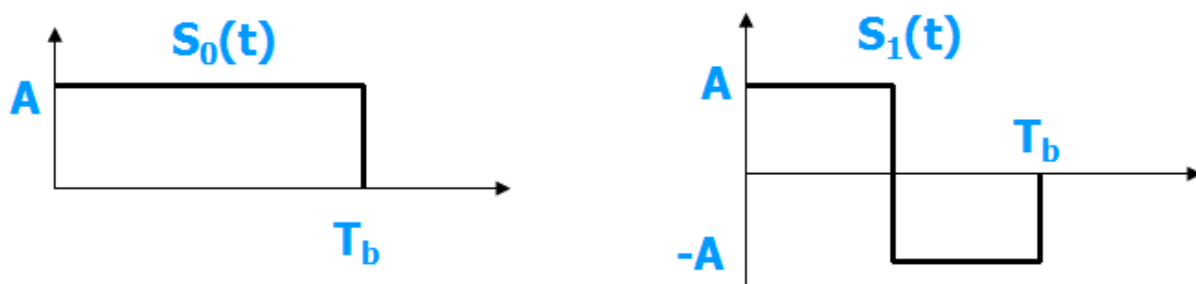
Pada saat interval  $0 \leq t \leq T_b$ , mencuplik 2 keluaran saat  $t = T_b$ , dan mengumpankan keluaran tercuplik ke *detector*.

### Illustrative Problem 5.1. [Signal Correlator]

Sinyal  $s_0(t)$  dan  $s_1(t)$  ditunjukkan pada gambar 5.2, dan diasumsikan  $s_0(t)$  merupakan sinyal transmisi.



Gambar 5.1. Korelasi silang dari sinyal terima  $r(t)$  dengan 2 sinyal yang ditransmisikan.



Gambar 5.2. Sinyal  $s_0(t)$  dan  $s_1(t)$  untuk sistem komunikasi biner.

Sinyal terima adalah :

$$r(t) = s_0(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_b$$

Tentukan keluaran korelator pada saat pencuplikan.

### Solusi

Ketika sinyal  $r(t)$  diproses oleh 2 sinyal korelator yang ditunjukkan gambar 5.1, keluaran  $r_0$  dan  $r_1$  pada saat pencuplikan  $t = T_b$  adalah

$$\begin{aligned} r_0 &= \int_0^{T_b} r(t) s_0(t) dt \\ &= \int_0^{T_b} s_0^2(t) dt + \int_0^{T_b} n(t) s_0(t) dt \\ &= E + n_0 \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

dan

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_0^{T_b} r(t) s_1(t) dt \\ &= \int_0^{T_b} s_0(t) s_1(t) dt + \int_0^{T_b} n(t) s_1(t) dt \\ &= n_1 \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Dimana  $n_0$  dan  $n_1$  merupakan komponen *noise* pada keluaran korelator sinyal, yaitu,

$$\begin{aligned} n_0 &= \int_0^{T_b} n(t) s_0(t) dt \\ n_1 &= \int_0^{T_b} n(t) s_1(t) dt \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Dan  $E = A^2 T_b$  merupakan energi sinyal  $s_0(t)$  dan  $s_1(t)$ . Kita perlu mengingat bahwa kedua sinyal *orthogonal*, sehingga,

$$\int_0^{T_b} s_0(t) s_1(t) dt = 0 \quad (5.2.7)$$

Selain itu ketika  $s_1(t)$  merupakan sinyal transmisi, maka sinyal terima

$$r(t) = s_1(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_b$$

Dalam kasus ini, keluaran korelator sinyal yaitu :

$$\begin{aligned} r_0 &= n_0 \\ r_1 &= E + n_1 \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Karena  $n(t)$  merupakan

$$E(n_0) = \int_0^{T_b} s_0(\tau) E[n(\tau)] d\tau = 0$$

$$E(n_1) = \int_0^{T_b} s_1(t) E[n(t)] dt = 0 \quad (5.2.9)$$

Dan variasi  $\sigma_i^2$ , for  $i = 1, 2$ , dimana

$$\sigma_i^2 = E(n_i^2)$$

$$= \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_i(t) s_i(\tau) E[n(t) n(\tau)] dt d\tau$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} s_i(t) s_i(\tau) \delta(t - \tau) dt d\tau$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} s_i^2(t) dt \quad (5.2.10)$$

$$= \frac{EN_0}{2}, \quad i = 0, 1 \quad (5.2.11)$$

Oleh karena ketika  $s_0(t)$  ditransmisikan, fungsi kerapatan probabilitas dari  $r_0$  dan  $r_1$  adalah

$$p(r_0 | s_0(t) \text{ was transmitted}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(r_0 - E)^2 / 2\sigma^2}$$

$$p(r_1 | s_0(t) \text{ was transmitted}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-r_1^2 / 2\sigma^2} \quad (5.2.12)$$

Dua fungsi kerapatan peluang ini yang ditunjukkan oleh  $p(r_0 | 0)$  dan  $p(r_1 | 0)$ , hal ini diilustrasikan pada gambar 5.4. Ketika  $s_1(t)$  ditransmisikan,  $r_0$  adalah Gaussian rerata nol dengan varians  $\sigma^2$  dan  $r_1$  merupakan gaussian dengan nilai rerata  $E$  dan varians  $\sigma^2$ .

### Matched filter

Matched filter menyediakan alternatif correlator untuk demodulating sinyal yang diterima  $r(t)$ . filter yang cocok untuk bentuk gelombang sinyal  $s(t)$  di mana  $0 \leq t \leq T_b$  memiliki respon impuls

$$h(t) = s(T_b - t), \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (5.2.13)$$

Akibatnya, sinyal gelombang  $y(t)$  - pada output filter yang cocok (matched filter) ketika input gelombangnya adalah  $s(t)$  diberikan oleh konvolusi integral, yaitu sebagai berikut :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (5.2.14)$$

Jika dilakukan proses substitusi di dalam persamaan (5.2.14) untuk nilai  $h(t - \tau)$  dari persamaan 5.2.13, maka diperoleh :

$$y(t) = \int_0^t s(\tau) s(T_b - 1 + \tau) d\tau \quad (5.2.15)$$

Dan jika mengambil contoh untuk nilai  $y(t)$  dengan  $t = T_b$  maka diperoleh

$$y(T_b) = \int_0^{T_b} s^2(t) dt = E \quad (5.2.16)$$

Dimana  $E$  adalah energy dari sinyal  $s(t)$ . Oleh karena itu, keluaran dari filter yang cocok (matched filter) di instan sampling  $t = T_b$  dan identik dengan sinyal output dari correlator.

### Ilustrasi masalah :

#### Illustrative problem 5.3 (matched filter)

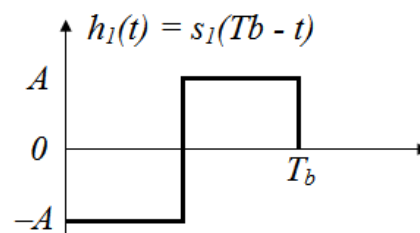
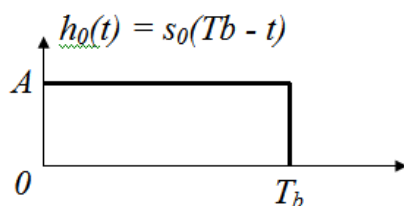
Mempertimbangkan penggunaan filter yang cocok (matched filter) untuk proses Demodulasi dari dua bentuk gelombang sinyal yang ditunjukkan pada Gambar 5.2 dan menentukan keluarannya.

#### Pemecahan masalah :

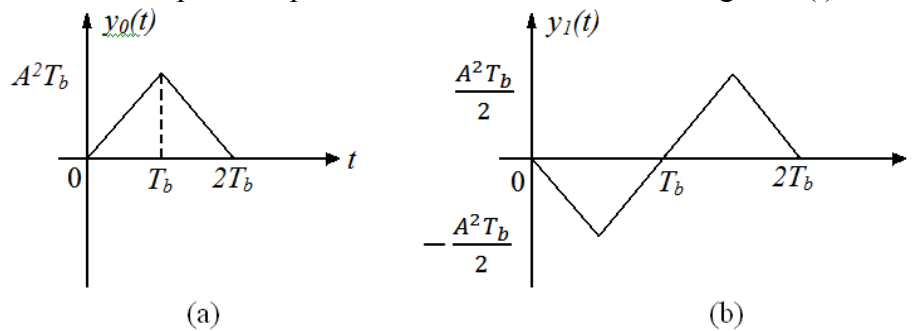
Impulse response dari 2 buah filter yang cocok adalah :

$$h_0 = s_0(T_b - t)$$

$$h_1 = s_1(T_b - t) \quad (5.2.17)$$



Gambar 5.5 impulse response dari matched filter untuk signal  $s_0(t)$  dan  $s_1(t)$



Gambar 5.3 sinyal keluaran dari matched filter saat  $s_0(t)$  ditransmisikan

Seperti yang digambarkan pada gambar 5.5. perhatikan bahwa setiap respon impuls diperoleh dengan membalik sinyal  $s(t)$  untuk mendapatkan  $s(-t)$  dan kemudian menunda sinyal yang terbalik yaitu  $s(-t)$  dengan  $T_b$  untuk mendapatkan  $s(T_b - t)$ .

Sekarang anggaplah sinyal gelombang  $s_0(t)$  adalah menular. maka sinyal yang diterima  $r(t) = s_0(t) + n(t)$  adalah melewati dua filter yang cocok. Respons filter dengan respon impuls  $H_0(t)$  untuk komponen sinyal  $s_0(t)$  diilustrasikan oleh gambar 5.6 (a). juga, tanggapan dari respons impuls filter dengan  $h_1(t)$  untuk komponen sinyal  $s_0(t)$  diilustrasikan oleh gambar 5.6 (b). maka, di sampling secara cepat yaitu  $t = T_b$ , output dari dua filter yang cocok (matched filter) dengan tanggapan impuls  $H_0(t)$  dan  $h_1(t)$  adalah

$$r_0 = E + n_0$$

$$r_1 = n_1 \quad (5.2.18)$$

Perhatikan bahwa keluaran tersebut identik dengan output yang diperoleh dari sampling sinyal keluaran dari correlator pada  $t = T_b$

### Detektor

Detektor mengamati correlator atau keluaran dari matched filter yaitu  $r_0$  dan  $r_1$  dan memutuskan apakah gelombang sinyal yang ditransmisikan adalah  $s_0(t)$  atau  $s_1(t)$ , yang sesuai dengan transmisi masing - masing, baik 0 atau 1. Detektor yang optimal didefinisikan sebagai detektor yang meminimalkan kemungkinan kesalahan.

### Ilustrasi masalah :

#### Illustrative problem 5.3 (binary detection)

marilah kita mempertimbangkan detector apa yang digunakan untuk sinyal-sinyal yang ditunjukkan pada gambar 5.2, yang sama-sama mungkin dan memiliki energi yang sama. Detektor optimal untuk membandingkan sinyal-sinyal ini  $r_0$  dan  $r_1$  dan memutuskan bahwa 0 itu ditransmisikan ketika  $r_0 > r_1$  dan bernilai 1 ditransmisikan ketika  $r_1 > r_0$ . Tentukan nilai dari probabilitas kesalahan yang terbentuk

### Pemecahan masalah :

Saat bentuk gelombang signal  $s_0(t)$  ditransmisikan, maka kemungkinan errornya adalah :

$$P_e = P(r_1 > r_0) = P(n_1 > E + n_0) = P(n_1 - n_0 > E) \quad (5.2.19)$$

sejak  $n_1$  dan  $N_0$  adalah nol berarti merupakan variabel-variabel acak gaussian, perbedaannya adalah  $x = n_1 - N_0$  juga nol, berarti gaussian. varians dari variabel acak  $x$  adalah :

$$E(x^2) = E[(n_1 - n_0)^2] = E(n_1^2) + E(n_0^2) - 2E(n_1 n_0) \quad (5.2.20)$$

Tetapi  $E(n_1 n_0) = 0$  karena bentuk gelombang dari sinyal adalah orthogonal, maka :

$$\begin{aligned} E(n_1 n_0) &= E \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_0(t) s_1(\tau) n(t) n(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_0(t) s_1(\tau) \delta(t - \tau) dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} s_0(t) s_1(\tau) dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Oleh sebab itu :

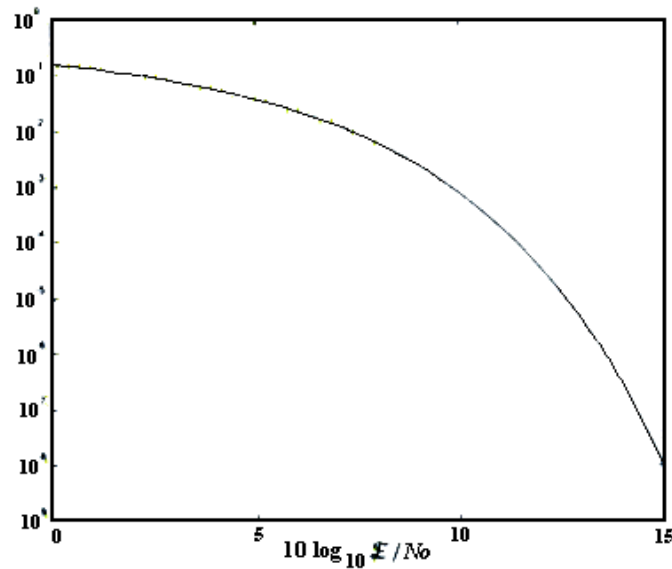
$$E(X^2) = 2 \left( \frac{EN_0}{2} \right) = EN_0 = \sigma_x^2 \quad (5.2.22)$$

karenanya, probabilitas kesalahan adalah :

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_0^\infty e^{-x^2/2\sigma_x^2} dx \\ P_e &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sqrt{E/N_0} e^{-x^2/2} dx \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

The ratio  $E/N_0$  disebut juga dengan signal to noise ratio (SNR).

Penurunan kinerja detektor yang diberikan dalam contoh ini didasarkan pada sinyal transmisi gelombang  $s_0(t)$ . pembaca dapat memverifikasi bahwa kemungkinan kesalahan yang diperoleh ketika  $s_1(t)$  adalah dipancarkan atau ditransmisikan identik dengan yang diperoleh ketika  $s_0(t)$ . Karena angka 0 dan 1 dalam urutan data sama-sama mungkin, kemungkinan rata-rata kesalahan adalah yang diberikan oleh (5.2.23).



Gambar 5.4 kemungkinan error untuk sinyal orthogonal

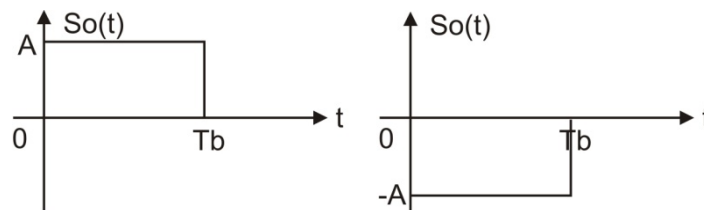
ungkapan ini untuk kemungkinan kesalahan dievaluasi dengan menggunakan MATLAB. Dimana hasil aplikasi atau penulisan dari script programnya ditampilkan oleh gambar 5.7 sebagai fungsi atas SNR. Dan SNR ditunjukkan dalam skala logaritmik ( $10 \log_{10} E/N_0$ ). Seperti yang diharapkan, probabilitas kesalahan berkurang secara eksponensial, yaitu dimana nilai dari SNR meningkat.

### 5.2.2 Other Binary Signal Transmission Methods

Selain metode transmisi yang telah disebutkan pada bagian sebelumnya, terdapat 2 metode lain untuk mentransmisikan informasi biner, yaitu: metode yang menggunakan sinyal antipodal dan metode yang menggunakan sinyal bertipe on-off.

#### Sinyal Antipodal

Dua buah sinyal disebut antipodal jika suatu sinyal merupakan negative dari sinyal yang lain.



Gambar 5.5 Contoh sepasang sinyal antipodal

Andaikan saat mentransmisikan informasi biner kita menggunakan sinyal antipodal  $s_0(t)=s(t)$  dan  $s_1(t)=-s(t)$  dimana  $s(t)$  merupakan sinyal dengan bentuk yang berubah-ubah dengan besar energi  $E$ , maka sinyal yang diterima dari kanal AWGN dapat diekspresikan sebagai:

$$r(t) = \pm s(t) + n(t) \quad ; \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (5.2.24)$$

Sedangkan receiver optimum untuk mengembalikan informasi menggunakan korelator single atau single matched filter yang sesuai dengan  $s(t)$  dan detector.

Misal  $s(t)$  telah ditransmisikan, maka sinyal yang diterima adalah:

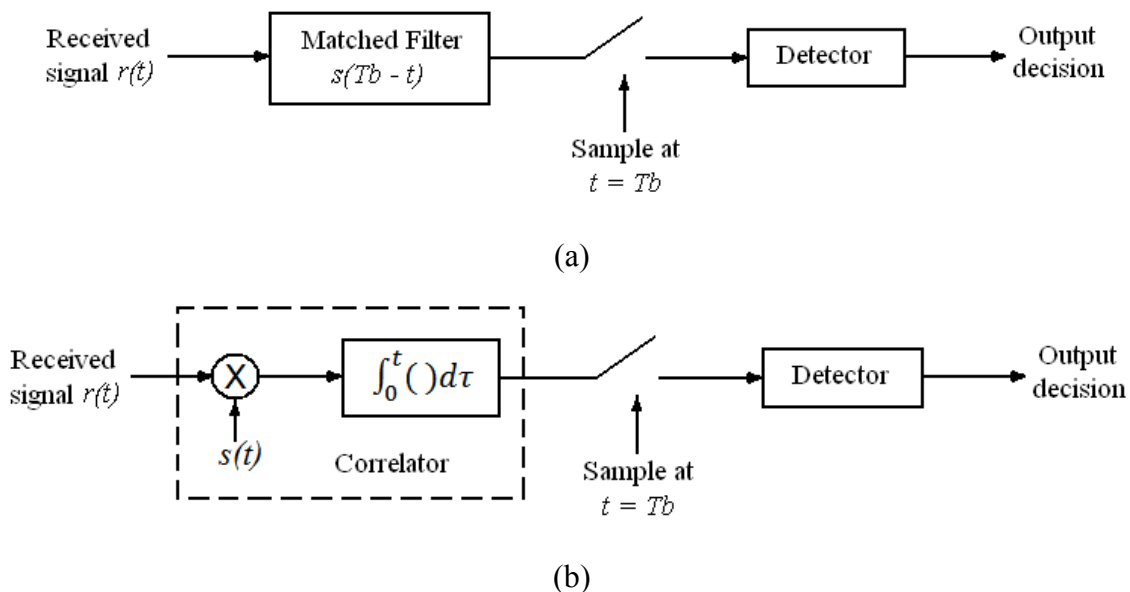
$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (5.2.25)$$

Output dari korelator atau matched filter pada sampling instant  $t = T_b$  adalah:

$$R(t) = E + n \quad (5.2.26)$$

Dimana  $E$  adalah energi sinyal dan  $n$  adalah komponen noise yang ditambahkan yang diekspresikan sebagai:

$$n = \int_0^{T_b} n(t)s(t)dt \quad (5.2.27)$$



Gambar 5.6 optimum receiver untuk sinyal anti poda. (a) Matched filter demodulator. (b) Correlation demodulator

Rata rata Additive noise  $n(t)$  adalah 0, sehingga  $E(n) = 0$ . Maka variansi komponen noise  $n$  adalah :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E(n^2) \\
&= \int_0^{Tb} \int_0^{Tb} E[n(t)n(\tau)s(t)s(\tau)] dt d\tau \\
&= \frac{N_0}{2} \int_0^{Tb} \int_0^{Tb} \delta(t-\tau) s(t)s(\tau) dt d\tau \\
&= \frac{N_0}{2} \int_0^{Tb} s^2(t) dt = \frac{N_0 E}{2}
\end{aligned} \tag{5.2.28}$$

Fungsi Probabilitiy density dari r ketika s(t) ditransmisikan adalah

$$p(r|s(t)) \text{ yang ditransmisikan} \equiv p(r|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(r-E)^2/2\sigma^2} \tag{5.2.29}$$

Saat sinyal  $-s(t)$  ditransmisikan, masukan dari detector adalah

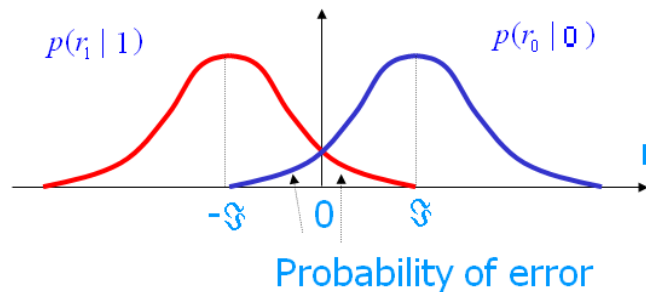
$$r = -E + n \tag{5.2.30}$$

dan fungsi probability density dari r adalah

$$p(r|s(t)) \text{ yang ditransmisikan} \equiv p(r|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(r+E)^2/2\sigma^2} \tag{5.2.31}$$

Rumus diatas adalah dua fungsi probability density yang diilustrasikan pada gambar 5.7

Untuk sinyal yang sama, Detector membandingkan r dengan threshold nol. Jika  $r > 0$  maka s(t) akan ditransmisikan, jika  $r < 0$  maka -s(t) yang akan ditransmisikan. Noise yang merusak sinyal disebabkan oleh error yang ada pada detector. Kemungkinan error pada detector dapat dikomputasikan dengan mudah.



Gambar 5.7 Probabaility density functions untuk input detektor

Agar s(t) dapat ditransmisikan, maka kemungkinan error sepadan dengan kemungkinan  $r < 0$ , yaitu :

$$\begin{aligned}
P_e &= P(r < 0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^0 e^{-(r-E)^2/2\sigma^2} dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-E/\sigma} e^{x^2/2} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Q\left(\frac{E}{\sigma}\right) \\
 &= Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_u}}\right)
 \end{aligned}
 \tag{5.2.32}$$

Hasil yang sama didapatkan saat  $-s(t)$  ditransmisikan. Konsekuensinya, saat dua sinyal mempunyai kemungkinan yang sama, maka rata-rata kemungkinan error akan sama dengan rumus (5.2.32)

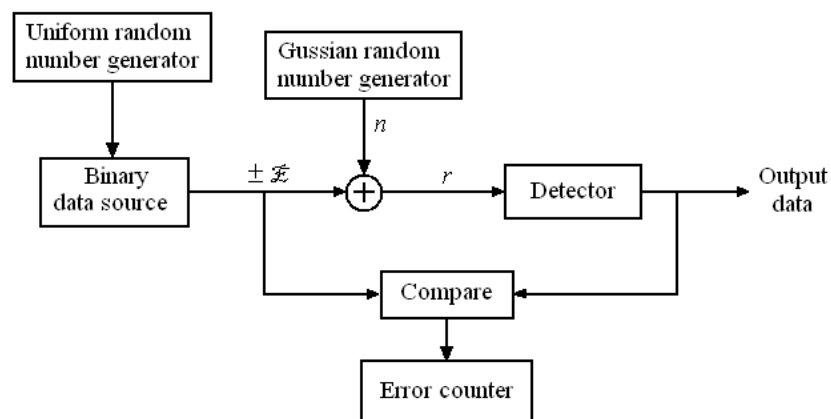
Bila kita ingin membandingkan kemungkinan error untuk sinyal antipodal dengan sinyal orthogonal ada pada rumus (5.2.23). dari sini kita dapat mengamati bahwa, untuk pengiriman sinyal yang sama, sinyal antipodal mempunyai dayaguna yang lebih baik. Mungkin kita dapat mengatakan bahwa sinyal antipodal menghasilkan performa yang sama seperti sinyal orthogonal dengan menggunakan  $\frac{1}{2}$  energy yang ditransmisikan oleh sinyal orthogonal. Karenanya sinyal antipodal lebih efisien 3 dB daripada sinyal orthogonal.

### Contoh soal : Simulasi antipodal biner

Gunakan simulasi monte carlo untuk memperkirakan dan menggambar kemungkinan error dari system komunikasi antibodal biner.

### Solusi

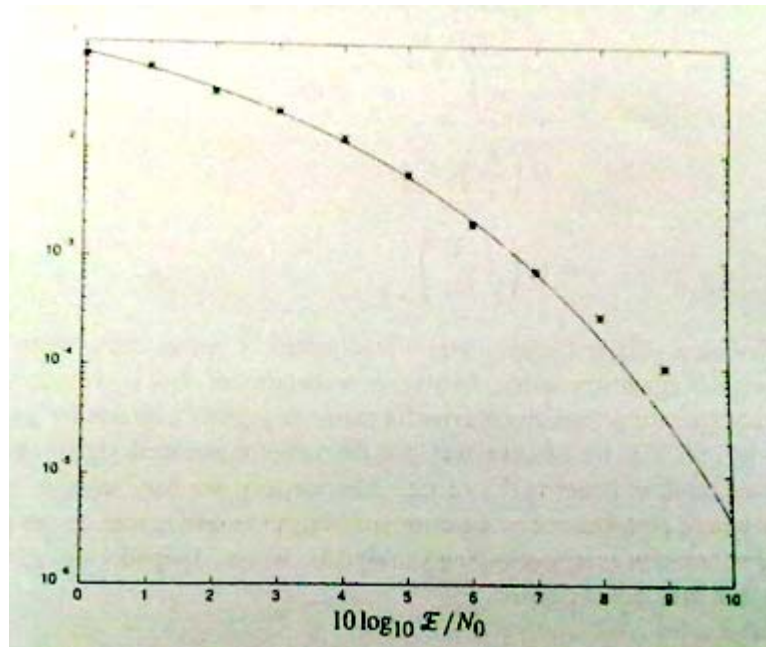
Kita akan mensimulasi random variable  $r$ , atau input dari detector. Untuk membangkitkan sekueunce informasi biner dari sumber data biner menggunakan nomor andom generator yang sama. Nilai 0 dan 1 dipetakan kedalam nilai  $\pm E$ , dimana  $E$  merepresentasikan energy sinyal.



Gambar 5.8 Model system komunikasi biner sinyal antipodal

Generator noise Gaussian digunakan untuk membangkitkan nilai zero-mean Gaussian random number dengan variansi  $\sigma^2$ . Detector membandingkan nilai acak dari  $r$  dengan threshold nol. Jika  $R > 0$ , maka bit yang ditransmisikan adalah 0, jika  $r < 0$  maka bit yang ditransmisikan adalah 1. Keluaran detector dibandingkan dengan nilai yang ditransmisikan dari bit informasi, dan bit error dapat dihitung. Gambar 5.9 mengilustrasikan hasil dari simulasi untuk transmisi dari 10000 bits

dengan nilai SNR yang berbeda. Teorinya nilai  $P_e$  diberikan oleh rumus (5.2.32) dan dilukiskan pada gambar 5.9 untuk pembandingan.



Gambar 5.9 Kemungkinan error dari simulasi monte carlo yang dibandingkan dengan kemungkinan error teoritis untuk sinyal antipodal

**Simulasi matlab 1 :**

```
Echo on
SNRindB1=0:1:10;
SNRindB2=0:0.1:10;
For I=1:length(SNRindB1),
sml_d_err_prb(i)=sml_dPe55(SNRindB1(i));
Echo off;
End;
Echo on;
For I=1:length(SNRindB2),
SNR=exp(SNRindB2(i)*log(10)/10);
theo_err_prb(i)=Qfunct(sqrt(2*SNR));
Echo off;
End;
Echo on;
Semilogy(SNRindB1,sml_d_err_prb,'*');
Hold
Semilogy(SNRindB2,theo_err_prb);
```

**Simulasi Matlab 2 :**

```
Function [p]=sml_dPe55(snr_in_dB)
E=1;
SNR=exp(snr_in_dB*log(10)/10);
Sgma=E/sqrt(2*SNR);
N=10000;
for i=N,
temp=rand;
if (temp<0.5),
dsource(i)=0;
else
dsource(i)=1;
```

```

end
end;
numofer=0;
for i=1:N,
if(dsouce(i)==0),
r=-E+gngauss(sgma);
else
r=E+gngauss(sgma);
end;
if(r<0),
decis=0;
else
decis=1;
end;
if (decis~=desource(i)),
numoferr=numoferr+1;
end;
end;
p=numoferr/N;

```

### **Sinyal on-off untuk transmisi sinyal biner**

Urutan informasi biner dapat ditransmisikan dengan menggunakan sinyal on-off. Dalam mentransmisikan bit 0, tidak ada sinyal yang ditransmisikan dalam interval waktu  $T_b$ . Sedangkan dalam mentransmisikan bit 1, sebuah gelombang sinyal  $s(t)$  ditransmisikan. Sehingga, gelombang sinyal yang diterima direpresentasikan dengan :

$$r(t) = \begin{cases} n(t), & \text{jika 0 ditransmisikan} \\ s(t) + n(t), & \text{jika 1 ditransmisikan} \end{cases} \quad (5.2.33)$$

dimana  $n(t)$  merepresentasikan AWGN.

Seperti pada kasus sinyal antipodal, penerima yang optimal terdiri dari korelator atau filter kecocokan yang sesuai dengan  $s(t)$ , yang outputnya disampel pada  $t = T_b$  dan diikuti oleh detector yang membandingkan sampel output dengan threshold, dilambangkan dengan  $\alpha$ . Jika  $r < \alpha$ , maka bit 1 dinyatakan telah ditransmisikan, kalau tidak, bit 0 dinyatakan telah ditransmisikan.

Input pada detector diekspresikan dengan :

$$\begin{cases} n, & \text{jika bit 0 ditransmisikan} \end{cases} \quad (5.2.34)$$

$r =$

$E + n$ , jika bit 1 ditransmisikan

Dimana  $n$  adalah variabel zero-mean Gaussian dengan variansi  $\sigma^2 = E N_0/2$ . Oleh karena itu, fungsi probabilitas kepadatan kondisional dari variabel random  $r$  adalah :

$$p(r|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-r^2/2\sigma^2}, \quad \text{jika bit 0 ditransmisikan}$$

$$p(r|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(r-E)^2/2\sigma^2}, \quad \text{jika bit 1 ditransmisikan}$$

Dengan mengasumsikan bahwa bit informasi biner akan mungkin sama, kita memiliki kemungkinan eror rata-rata adalah :

$$P_e(\alpha) = \frac{1}{2} P_{e0}(\alpha) + \frac{1}{2} P_{e1}(\alpha) \quad (5.2.35)$$

Nilai threshold  $\alpha$  yang meminimalkan kemungkinan rata-rata eror dihasilkan dengan mendiferensialkan  $P_e(\alpha)$  dan mencari threshold optimumnya. Dapat ditunjukkan dengan :

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{E}{2} \quad (5.2.36)$$

Kita dapat memperhatikan bahwa performansi tingkat eror pada sinyal on-off tidak sebagus sinyal antipodal. Error-rate pada sinyal on-off 6dB lebih buruk daripada sinyal antipodal. Dan 3dB lebih buruk daripada sinyal orthogonal. Bagaimanapun juga, rata-rata energi yang ditransmisikan untuk sinyal on-off adalah 3dB lebih sedikit daripada sinyal antipodal maupun sinyal orthogonal.

### 5.3 Sinyal Transmisi Multi-Amplitudo

Pada bagian ini, digunakan gelombang sinyal yang menggunakan beberapa nilai amplitudo berbeda. Dengan demikian, dapat dikirimkan beberapa bit per gelombang sinyal

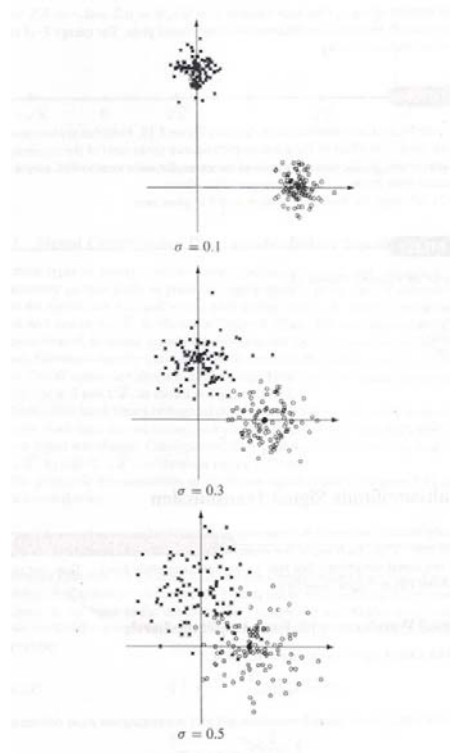
#### 5.3.1 Gelombang Sinyal dengan Empat Tingkat Amplitudo

Diketahui gelombang sinyal memiliki persamaan berikut

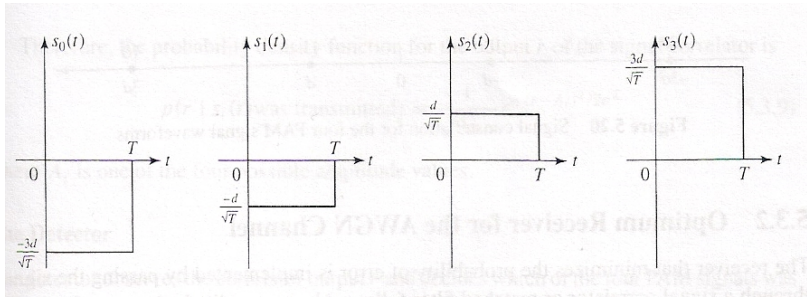
$$s_m(t) = A_m g(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.3.1)$$

Dimana  $A_m$  adalah amplitudo dari gelombang mth dan  $g(t)$  merupakan pulsa kotak yang di definisikan

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{1/T}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (5.3.2)$$



Gambar 1.1. Sinyal yang diterima pada masukan amplitudo pada sinyal amplitudo



Gambar 1.2. Gelombang Sinyal Multi-Amplitudo

sebagai energi dimana pulsa  $g(t)$  ternormalisasi menjadi satu. Khususnya, pada kasus dimana amplitudo sinyal mengambil satu dari empat kemungkinan nilai – nilai yang berjarak sama, dinamakan  $\{A_m\} = \{-3d, -d, d, 3d\}$  atau sama dengan persamaan

$$A_m = (2m - 3)d, \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (5.3.3)$$

Dimana  $2d$  merupakan jarak Euclidean diantara dua tingkat amplitudo yang berdekatan. Empat gelombang sinyal ditunjukkan pada gambar 1.2 . kumpulan gambar ini disebut sinyal Pulse Amplitudo Modulation ( PAM ).

Keempat sinyal PAM dapat digunakan untuk mentransmisikan 2 bit per sinyal gelombang. Kemudian dapat di misalkan sinyal gelombang menjadi bit – bit, seperti:

$$00 \rightarrow s_0(t)$$

$$01 \rightarrow s_1(t)$$

$$11 \rightarrow s_2(t)$$

$$10 \rightarrow s_3(t)$$

Setiap informasi bit  $\{00, 01, 11, 10\}$  dinamakan symbol, dan durasi waktu  $T$  disebut interval simbol. Bila pesat bit adalah  $R = 1 / Tb$ , maka interval simbol adalah  $T = 2 Tb$ . Sejak semua gelombang sinyal dinyatakan sebagai fungsi  $g(t)$ , maka gelombang sinya ini akan direpresentasikan secara geometri sebagai titik – titik pada garis real. Oleh karean itu , representasi geometri PAM ditunjukkan pada gambar 1.3 .

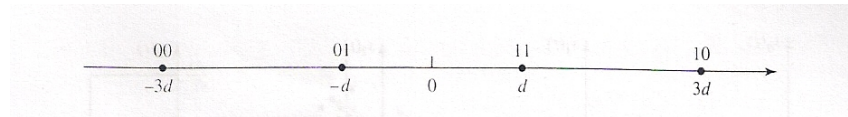
Diasumsikan gelombang sinyal PAM ditransmisikan melalui kanal AWGN. Maka sinyal yang diteima direpresentasikan sebagai

$$r(t) = s_i + n(t), \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.3.4)$$

Dimana  $n(t)$  merupakan derau Gaussian dengan daya spectrum  $N_0/2$  watts/hertz. Dan nilai  $r(t)$  menentukan gelombang sinyal mana yang diransmisikan dari empat gelombang yang ada pada interval  $0 \leq t \leq T$ .

### 5.3.2 Penerima optimum untuk kanal AWGN

Untuk meminimalkan kemungkinan kesalahan maka dilakukan pengiriman sinyal melalui sinyal korelator atau matched filter dengan amplitudo detektor. Karena sinyal korelator dan matched filter memiliki keluaran yang sama, maka yang akan di bahas disini adalah sinyal korelator saja.



Gambar 1.3. Konstelasi sinyal untuk gelombang sinyal PAM

Sinyal korelator

Sinyal korelator berkorelasi silang dengan sinyal yang diterima  $r(t)$  dengan pulsa sinyal  $g(t)$  dan keluaran di cuplik pada  $t = T$ , maka keluaran sinyal korelator adalah

$$\begin{aligned}
 r &= \int_0^T r(t)g(t)dt \\
 &= \int_0^T A_i g^2(t)dt + \int_0^T g(t)n(t)dt \\
 &= A_i + n
 \end{aligned}$$

(5.3.5)

Dimana  $n$  menunjukkan komponen derau, didefinisikan sebagai

$$n = \int_0^T g(t)n(t)dt \quad (5.3.6)$$

Kita catat bahwa  $n$  adalah variable random Gaussian dengan mean

$$E(n) = \int_0^T g(t)E[n(t)]dt = 0 \quad (5.3.7)$$

Dan variansnya adalah

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= E(n^2) \\
 &= \int_0^T \int_0^T g(t)g(\tau)E[n(t)n(\tau)]dt d\tau \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T g(t)g(\tau)\delta(t - \tau)dt d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T g^2(t) dt \\
&= \frac{N_0}{2}
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Kemudian, fungsi probability density untuk keluaran  $r$  dari sinyal korelator adalah

$$P(r | s_i(t) \text{ telah ditransmisikan}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-A_i)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.3.9}$$

Dimana  $A_i$  adalah salah satu dari empat kemungkinan nilai amplitudo.

Detektor

Detektor mengamati keluaran korelator  $r$  dan memilih salah satu dari empat sinyal PAM yang di transmisikan pada interval sinyal. Sejak amplitudo sinyal penerima  $A_i$  dapat mengambil nilai  $\pm d$ ,  $\pm 3d$ , seperti yang digambarkan pada gambar 1.2, detektor amplitudo optimum membandingkan antar keluaran korelator  $r$  dengan empat dari kemungkinan tingkat amplitudo yang dapat ditransmisikan dan memilih tingkat amplitudo yang mendekati jarak Euclidian ke  $r$ . maka di dapatkan persamaan

$$D_i = |r - A_i|, \quad i=0, 1, 2, 3 \tag{5.3.10}$$

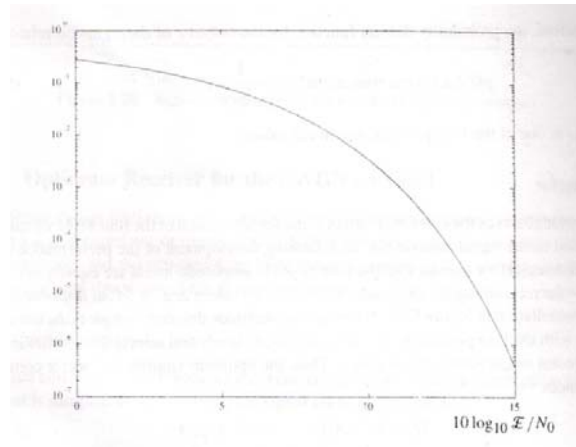
Kemudian detektor amplitudo optimum menghitung dan memilih jarak yang terdekat.

Dapat diketahui bahwa kesalahan terjadi ketika variable derau  $n$  melebihi besarnya satu setengah dari jarak antara tingkat amplitudo, yaitu saat  $|n| > d$ . bagaimanapun, saat tingkat amplitudo  $+3d$  atau  $-3d$  di transmisikan, maka kesalahan dapat diketahui dari satu arah saja. Karena keempat tingkat amplitudo memiliki kemungkinan yang sama, maka probabilitas rata – rata dari simbol kesalahan adalah

$$\begin{aligned}
P_4 &= \frac{3}{4} P(|r - A_m| > d) \\
&= \frac{3}{2} \int_d^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\
&= \frac{3}{2} \int_{d/\sigma}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2} dx \\
&= \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{\sigma^2}}\right) \\
&= \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right)
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Diketahui bahwa  $(2d^2) \equiv \delta^2$ , sehingga persamaan di atas menjadi

$$P_4 = \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{\delta^2}{4N_0}} \right) \quad (5.3.12)$$



Gambar 1.4 Probabilitas kesalahan dari PAM tingkat empat

Sebagai alternatif, probabilitas kesalahan rata-rata dapat dinyatakan dalam bentuk energi sinyal. Karena keempat tingkat amplitudo memiliki kemungkinan yang sama, maka sinyal rata-rata energi per simbol adalah

$$E_{av} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \int_0^T s_k^2(t) dt = 5d^2 \quad (5.3.13)$$

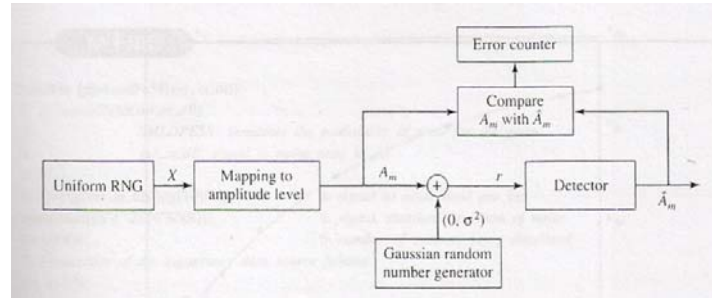
Jika  $d^2 = E_{av}/5$  maka,

$$P_4 = \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{2E_{av}}{5N_0}} \right) \quad (5.3.14)$$

Karena setiap simbol terdiri dari dua bit informasi, maka energi rata-rata yang ditransmisikan per bit adalah  $E_{av}/2 \equiv E_{avb}$ .

Probabilitas rata-rata dari kesalahan  $P_4$  diperlihatkan pada gambar 1.4 sebagai fungsi dari SNR dimana fungsi tersebut didefinisikan sebagai  $10 \log_{10} (E_{avb}/N_0)$ .

Contoh Permasalahan



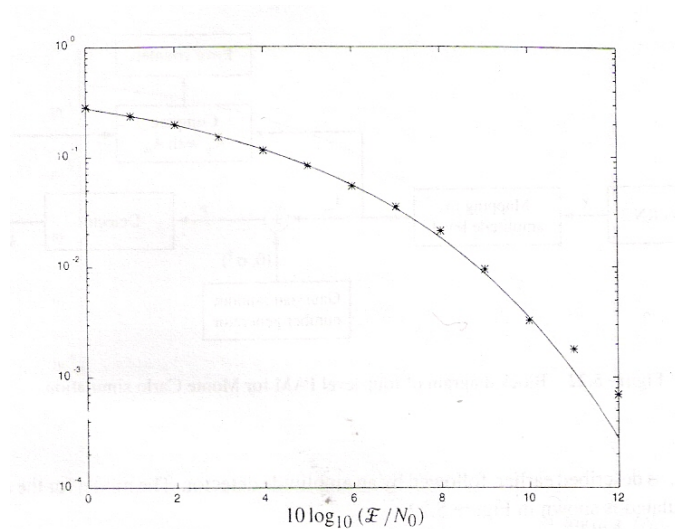
Gambar 1.5 Diagarm blok PAM tingkat empat Monte Carlo

Berdasarkan gambar, disimulasikan variabel acak  $r$ , dimana merupakan keluaran dari sinyal korelator dan masukan dari detektor. Dimulai dengan mengurutkan simbol –symbol sesuai dengan tngkat amplitudonya  $\{A_m\}$ . untuk menyelesaikan masalah ini, digunakan angka – angka acak dari rentang (0,1). Rentang ini dibagi menjadi empat interval yaitu, (0, 0.25), (0.25, 0.5), (0.5, 0.75), (0.75, 1.0), dimana setiap sub interval melambangkan simbol – symbol berikut 00, 01, 11, 10. Kemudian keluaran dari dipetakan menjadi  $-3d, -d, d, 3d$ .

Komponen derau memiliki mean 0 dan varians  $\sigma^2$  dihasilkan oleh Gaussian number generator. Untuk mempermudah, parameter jarak  $d = 1$  dan varians  $\sigma^2$ . detektor mengetahui  $r = A_m + n$  dan menghitung jarak antara  $r$  dengan empat kemungkinan sinyal amplitudo yang ditransmisikan. Keluarannya adalah  $\hat{A}_m$  yang merupakan amplitudo sinyal yang memiliki jarak terdekat.

Gambar 1.6 memperlihatkan hasil simulasi  $N = 1000$  simbol dengan nilai yang berbeda berdasarkan SNR rata –rata , didefinisikan sebagai berikut

$$\frac{S_{avb}}{N_0} = \frac{5}{4} \left( \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \right)$$



Gambar 1.6. Probabilitas kesalahan simulasi Monte Carlo untuk nilai  $M=4$

### 5.3.3 Gelombang Sinyal dengan Level Amplitudo Jamak

Secara umum sebuah set  $M = 2^k$  gelombang sinyal multiampitudo direpresentasikan sebagai berikut:

$$S_m(t) = A_m g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

Dimana nilai amplitudo  $M$  adalah

$$A_m = (2m - M + 1)d, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (5.3.16)$$

Sedangkan  $g(t)$  adalah pulsa kotak. Setiap gelombang sinyal membawa  $k = \log_2 M$  bit informasi. Saat

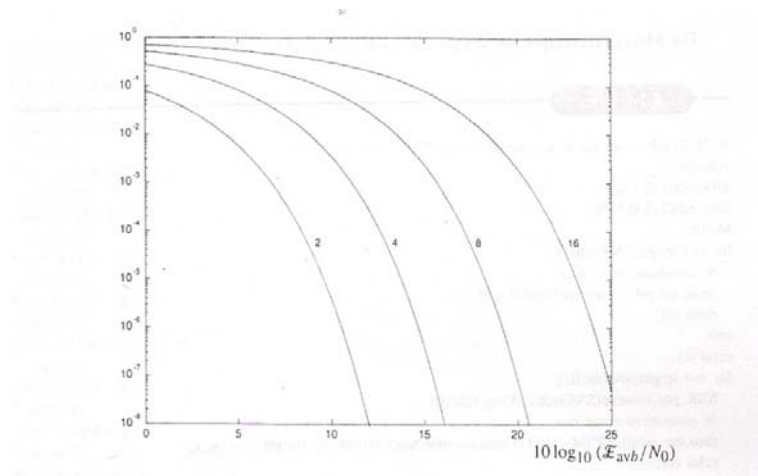
pesat bit sebesar  $R = \frac{1}{T_b}$ , maka pesat simbol adalah  $\frac{1}{T} = \frac{1}{kT_b}$ . Seperti pada kasus 4 level PAM, penerima optimal terdiri dari sebuah sinyal korelator (atau matched filter) yang diikuti sebuah detektor amplitudo yang menghitung jarak Euclidan untuk  $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$ . Jika peluang level amplitudo adalah sama, keputusan dibuat berdasarkan level amplitudo yang memiliki jarak Euclidan terkecil.

Probabilitas error untuk detektor optimal pada sebuah sistem M-level PAM dapat dengan mudah dinyatakan sebagai berikut:

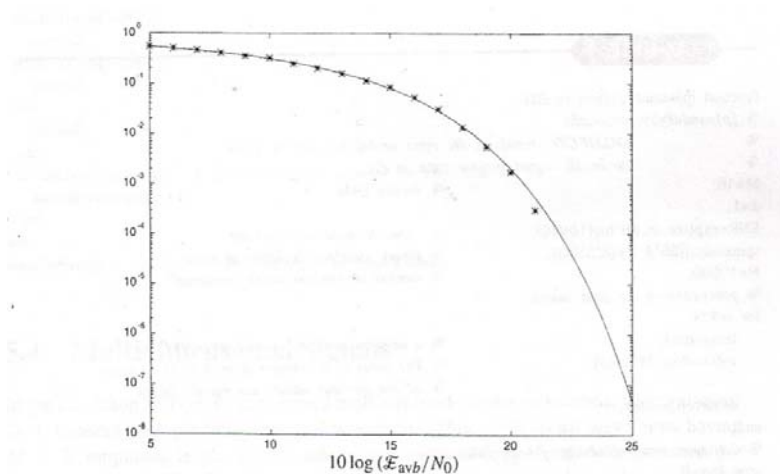
$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q \left( \sqrt{\frac{6(\log_2 M) E_{avg}}{(M^2-1)N_0}} \right)$$

(5.3.17)

Dimana  $E_{avg}$  adalah rata-rata energi dari sebuah bit informasi.



Gambar 1.7. Probabilitas kesalahan symbol untuk M-level PAM dengan M= 2,4,8,16



Gambar 1.8. Pesat kesalahan dari simulasi Monte Carlo dibandingkan dengan probabilitas kesalahan teoritis untuk M=16 PAM

#### 5.4 Sinyal Multidimensi

Pada bagian sebelumnya telah dibuat gelombang sinyal multiamplitudo, yang memungkinkan kita untuk mengirimkan beberapa bit dalam sebuah gelombang sinyal. Sehingga dengan gelombang sinyal yang memiliki  $M = 2^k$  level amplitudo, kita dapat mengirim sejumlah  $k = \log_2 M$  bit informasi tiap gelombang sinyal. Kita juga telah mengetahui bahwa sinyal multiamplitudo dapat direpresentasikan secara geometris sebagai titik sinyal pada garis real. Oleh karena itu sinyal tersebut dinamakan sinyal 1-dimensi.

Pada bagian ini kita mempertimbangkan pembuatan gelombang sinyal kelas  $M = 2^k$  yang mempunyai representasi multidimensional. Gelombang sinyal dapat direpresentasikan secara geometris sebagai titik-titik pada

ruang N-dimensi. Kita telah mengetahui bahwa sinyal biner yang orthogonal dapat direpresentasikan secara geometris sebagai titik-titik pada ruang 2-dimensi.

#### 5.4.1 Sinyal Orthogonal Multidimensi

Ada banyak cara untuk membuat gelombang sinyal multidimensi dengan bermacam pengaturan. Pada bagian ini, kita akan membuat sebuah set dari  $M = 2^k$  gelombang  $s_i(t)$ , untuk  $i = 0, 1, \dots, M-1$  yang memiliki syarat (a) orthogonalitas bersama dan (b) energi yang sama pula. Kedua syarat ini dapat dengan ringkas dituliskan dengan

$$\int_0^T s_i(t)s_k(t)dt = E\delta_{ik}, \quad i, k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (5.4.1)$$

Dimana E adalah energi tiap gelombang sinyal dan  $\delta_{ik}$  disebut *Kronecker delta* yang didefinisikan sebagai

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (5.4.2)$$

Seperti pada diskusi sebelumnya, diasumsikan bahwa sebuah sumber informasi menyediakan runtun bit-bit informasi yang selanjutnya ditransmisikan melalui kanal komunikasi. Bit-bit informasi muncul pada pesat yang seragam yaitu  $R$  bit per detik. Kebalikan dari  $R$  adalah interval bit  $T_b$ . Modulator mengambil  $k$  bit pada satu waktu dan memetakannya pada salah satu dari  $M = 2^k$  gelombang sinyal. Tiap blok yang berisikan  $k$  bit disebut symbol. Interval waktu yang tersedia untuk mengirimkan tiap symbol adalah  $T - kT_b$ . Maka  $T$  adalah interval symbol.

Cara paling mudah untuk membangun sebuah set  $M = 2^k$  gelombang orthogonal dengan energi yang sama pada interval  $(0, T)$  adalah dengan membagi interval tersebut dengan  $M$  sehingga terdapat durasi subinterval sebesar  $\frac{T}{M}$  dan memasukkan sebuah gelombang sinyal pada tiap subinterval. Gambar 1.9 mengilustrasikan konstruksi sinyal orthogonal dengan  $M = 4$ . Semua gelombang sinyal yang terbentuk dari proses ini memiliki energi yang besarnya identik yaitu

$$\begin{aligned} E &= \int_0^T s_i^2(t)dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1 \\ &= \frac{A^2 T}{M} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$