

Dari DFT menjadi FFT

Dr. Eng. Risanuri Hidayat
Jurusan Teknik Elektro FT UGM,
Yogyakarta

I. PENDAHULUAN

Berikut akan dijelaskan Dekomposisi DFT sehingga menjadi FFT dengan algorithma Cooley and Tukey.

II. PERSAMAAN DFT

DFT mempunyai persamaan

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \dots\dots\dots(1)$$

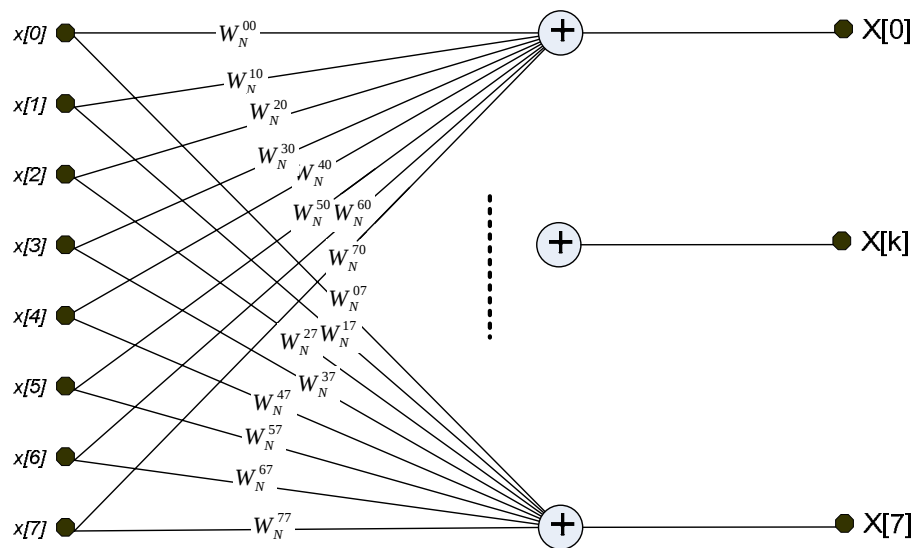
$$W_N^{nk} = e^{-j2\pi nk / N}$$

Dengan $x[n]$ adalah fungsi waktu dalam bentuk diskret, dan $X[k]$ adalah transformasi fouriernya. Dan $n = 0 \ 1 \ 2 \dots N-1$, serta $k = 0 \ 1 \ 2 \dots N-1$. Persamaan (1) jika dijabarkan secara detail akan membentuk sebuah persamaan matriks seperti berikut ini,

$$\begin{bmatrix} W_8^{00} & W_8^{10} & W_8^{20} & W_8^{30} & W_8^{40} & W_8^{50} & W_8^{60} & W_8^{70} \\ W_8^{01} & W_8^{11} & W_8^{21} & W_8^{31} & W_8^{41} & W_8^{51} & W_8^{61} & W_8^{71} \\ W_8^{02} & W_8^{12} & W_8^{22} & W_8^{32} & W_8^{42} & W_8^{52} & W_8^{62} & W_8^{72} \\ W_8^{03} & W_8^{13} & W_8^{23} & W_8^{33} & W_8^{43} & W_8^{53} & W_8^{63} & W_8^{73} \\ W_8^{04} & W_8^{14} & W_8^{24} & W_8^{34} & W_8^{44} & W_8^{54} & W_8^{64} & W_8^{74} \\ W_8^{05} & W_8^{15} & W_8^{25} & W_8^{35} & W_8^{45} & W_8^{55} & W_8^{65} & W_8^{75} \\ W_8^{06} & W_8^{16} & W_8^{26} & W_8^{36} & W_8^{46} & W_8^{56} & W_8^{66} & W_8^{76} \\ W_8^{07} & W_8^{17} & W_8^{27} & W_8^{37} & W_8^{47} & W_8^{57} & W_8^{67} & W_8^{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \\ x[5] \\ x[6] \\ x[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \\ X[4] \\ X[5] \\ X[6] \\ X[7] \end{bmatrix}$$

Gbr. 1 adalah bentuk diagram DFT dengan $N=8$. Anggap bahwa $W_N^0 = e^0 = 1$, dan perkalian dengan angka 1 tidak perlu dilakukan. Dengan $N=8$ jumlah perkalian dan penjumlahan DFT murni berturut-turut adalah 56 dan 56. Di dalam berbagai buku tentang DFT dikatakan jumlah perkalian sama dengan N^2 . Namun jumlah itu dengan menyertakan perkalian dengan $W_N^0 (=1)$. Di sini perkalian dengan W_N^0 dianggap tidak perlu (tidak dilakukan), sehingga jumlah perkaliannya adalah N^2-N . Dari diagram dan/atau persamaan matriks, tampak pula bahwa jumlah penjumlahannya adalah juga N^2-N .

Untuk mempermudah penjelasan, selanjutnya dipergunakan contoh dengan $N=8$.



Gambar 1.

Keterangan gambar,



Maksudnya adalah $x[0].W_N^{00}$

III. DEKOMPOSISI

Persamaan (1) di atas dapat dibagi menjadi dua kelompok, yaitu kelompok genap dan kelompok ganjil, sehingga persamaan menjadi seperti berikut,

$$X[k] = \sum_{\text{even } n} x[n]W_N^{nk} + \sum_{\text{odd } n} x[n]W_N^{nk} \dots\dots\dots(2)$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k}$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_N^{2rk} \quad \dots(3)$$

Untuk kelompok genap (even) $n=2r$, dan untuk kelompok ganjil (odd) $n=2r+1$.

Ketika,

$$W_N^{2rk} = e^{-j2\pi 2rk/N} = e^{-j2\pi rk/(N/2)} \\ = W_{N/2}^{rk}$$

Maka (3) menjadi,

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_{N/2}^{rk} \quad \dots\dots\dots(4)$$

Jika dijabarkan, maka (4) adalah sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} W_4^{0k} & W_4^{1k} & W_4^{2k} & W_4^{3k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \\ x[4] \\ x[6] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_4^{0k} & W_4^{1k} & W_4^{2k} & W_4^{3k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \\ x[5] \\ x[7] \end{bmatrix} \cdot W_8^k = [X[k]]$$

$$\begin{bmatrix} W_4^{00} & W_4^{10} & W_4^{20} & W_4^{30} \\ W_4^{01} & W_4^{11} & W_4^{21} & W_4^{31} \\ W_4^{02} & W_4^{12} & W_4^{22} & W_4^{32} \\ W_4^{03} & W_4^{13} & W_4^{23} & W_4^{33} \\ W_4^{04} & W_4^{14} & W_4^{24} & W_4^{34} \\ W_4^{05} & W_4^{15} & W_4^{25} & W_4^{35} \\ W_4^{06} & W_4^{16} & W_4^{26} & W_4^{36} \\ W_4^{07} & W_4^{17} & W_4^{27} & W_4^{37} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \\ x[4] \\ x[6] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_4^{00} & W_4^{10} & W_4^{20} & W_4^{30} \\ W_4^{01} & W_4^{11} & W_4^{21} & W_4^{31} \\ W_4^{02} & W_4^{12} & W_4^{22} & W_4^{32} \\ W_4^{03} & W_4^{13} & W_4^{23} & W_4^{33} \\ W_4^{04} & W_4^{14} & W_4^{24} & W_4^{34} \\ W_4^{05} & W_4^{15} & W_4^{25} & W_4^{35} \\ W_4^{06} & W_4^{16} & W_4^{26} & W_4^{36} \\ W_4^{07} & W_4^{17} & W_4^{27} & W_4^{37} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \\ x[5] \\ x[7] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_8^0 \\ W_8^1 \\ W_8^2 \\ W_8^3 \\ W_8^4 \\ W_8^5 \\ W_8^6 \\ W_8^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \\ X[4] \\ X[5] \\ X[6] \\ X[7] \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(5)$$

Catatan bahwa pada (5), perkalian dengan W_N^k (W_8^k) adalah perkalian array/vektor. Sebagai contoh, di MATLAB menggunakan operasi $\cdot$. Perkalian array A dan B dengan perintah $A \cdot B$ adalah perkalian elemen-demi elemen dari vektor-vektor A dan B, menghasilkan vector dengan ukuran yang sama dengan vektor A atau B (seperti operasi penjumlahan). Vektor A dan B harus mempunyai ukuran yang sama, kecuali salah satunya adalah bilangan scalar.

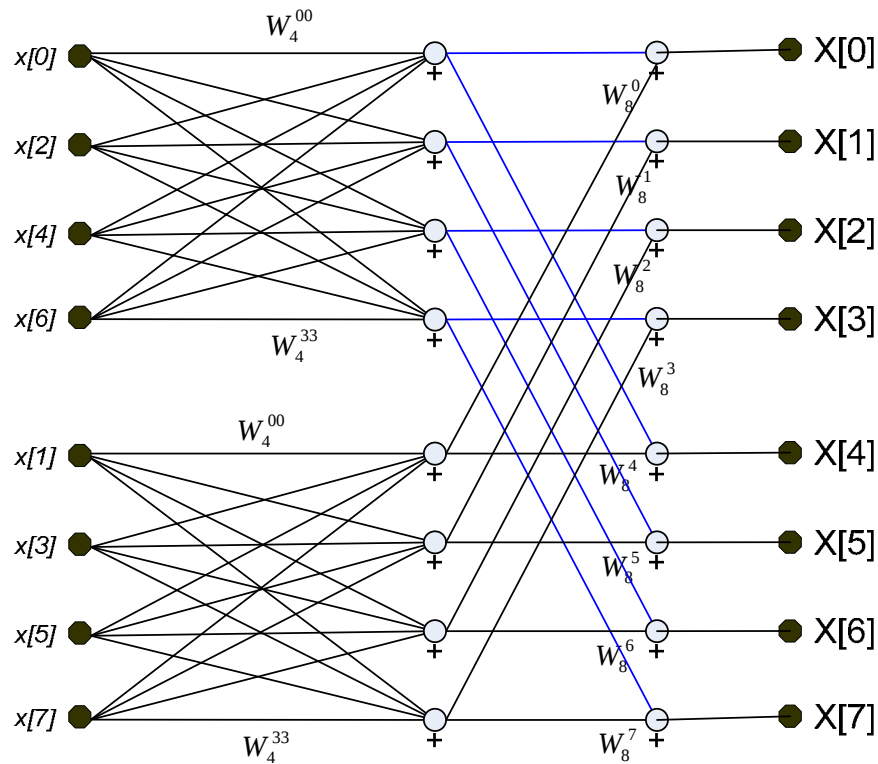
Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa, jika n dan k adalah integer (bilangan bulat), maka

$$W_N^{rk} = e^{-j2\pi mk / N} = e^{-j2\pi (nk \bmod N)}$$

Sehingga W_N^{rk} di (5) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{bmatrix} W_4^{00} & W_4^{10} & W_4^{20} & W_4^{30} \\ W_4^{01} & W_4^{11} & W_4^{21} & W_4^{31} \\ W_4^{02} & W_4^{12} & W_4^{22} & W_4^{32} \\ W_4^{03} & W_4^{13} & W_4^{23} & W_4^{33} \\ W_4^{00} & W_4^{10} & W_4^{20} & W_4^{30} \\ W_4^{01} & W_4^{11} & W_4^{21} & W_4^{31} \\ W_4^{02} & W_4^{12} & W_4^{22} & W_4^{32} \\ W_4^{03} & W_4^{13} & W_4^{23} & W_4^{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \\ x[4] \\ x[6] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_4^{00} & W_4^{10} & W_4^{20} & W_4^{30} \\ W_4^{01} & W_4^{11} & W_4^{21} & W_4^{31} \\ W_4^{02} & W_4^{12} & W_4^{22} & W_4^{32} \\ W_4^{03} & W_4^{13} & W_4^{23} & W_4^{33} \\ W_4^{00} & W_4^{10} & W_4^{20} & W_4^{30} \\ W_4^{01} & W_4^{11} & W_4^{21} & W_4^{31} \\ W_4^{02} & W_4^{12} & W_4^{22} & W_4^{32} \\ W_4^{03} & W_4^{13} & W_4^{23} & W_4^{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \\ x[5] \\ x[7] \end{bmatrix} \cdot * \begin{bmatrix} W_8^0 \\ W_8^1 \\ W_8^2 \\ W_8^3 \\ W_8^4 \\ W_8^5 \\ W_8^6 \\ W_8^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \\ X[4] \\ X[5] \\ X[6] \\ X[7] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6)$$

Lihat matriks yang berisi W. Empat baris di bawah adalah sama dengan empat baris yang atas. Persamaan (6) jika digambarkan dalam bentuk diagram adalah seperti Gbr 2. Di sini jumlah perkalian dan penjumlahan berturut-turut adalah $(4 \times 4 \times 2) = 32$ dan $(3 \times 4 \times 2 + 8) = 32$.



Gambar 2.

Telah kita ketahui dari (4) bahwa persamaan Transformasi Fourier terbagi menjadi dua kelompok, yaitu kelompok genap dan kelompok ganjil. Anggap bahwa fungsi genap $x[2r]$ menjadi fungsi baru, katakanlah $x_e[r]$, dan fungsi ganjil $x[2r+1]$ menjadi fungsi baru $x_o[r]$. (subscript e berasal dari bahasa inggris even yang berarti genap, dan subscript o berasal dari bahasa inggris odd yang berarti ganjil). Dengan penjabaran seperti berikut,

$$x_e[r] = x[2r]$$

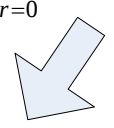
$$x_o[r] = x[2r+1]$$

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[r] W_{N/2}^{rk}$$

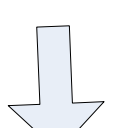
$$\begin{bmatrix} W_4^{0k} & W_4^{1k} & W_4^{2k} & W_4^{3k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e[0] \\ x_e[1] \\ x_e[2] \\ x_e[3] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_4^{0k} & W_4^{1k} & W_4^{2k} & W_4^{3k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_o[0] \\ x_o[1] \\ x_o[2] \\ x_o[3] \end{bmatrix} \cdot W_8^k = [X[k]]$$

Kelompok genap dan kelompok ganjil masing-masing membentuk persamaan yang mirip sebagaimana (4). Sehingga masing-masing kelompok tersebut dapat di-dekomposisi sebagaimana langkah sebelumnya. Dengan penjabaran seperti berikut ini, maka persamaan TF dapat dikembangkan menjadi seperti (7).

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_e[r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_o[r] W_{N/2}^{rk}$$



$$\sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x_e[2r] W_{N/4}^{rk} + W_{N/2}^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x_e[2r+1] W_{N/4}^{rk}$$



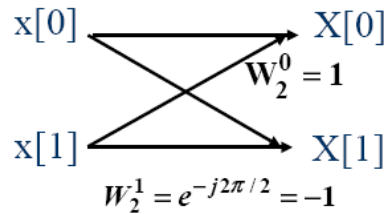
$$W_N^k \left(\sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x_o[2r] W_{N/4}^{rk} + W_{N/2}^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x_o[2r+1] W_{N/4}^{rk} \right)$$

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x_e[2r] W_{N/4}^{rk} + W_{N/2}^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x_e[2r+1] W_{N/4}^{rk} +$$

$$W_N^k \left(\sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x_o[2r] W_{N/4}^{rk} + W_{N/2}^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x_o[2r+1] W_{N/4}^{rk} \right) \dots\dots\dots(7)$$

$$X[k] = \begin{bmatrix} W_2^{0k} & W_2^{1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e[0] \\ x_e[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_2^{0k} & W_2^{1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e[1] \\ x_e[3] \end{bmatrix} \cdot W_4^k +$$

$$\begin{bmatrix} W_2^{0k} & W_2^{1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o[0] \\ x_o[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_2^{0k} & W_2^{1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o[1] \\ x_o[3] \end{bmatrix} \cdot W_4^k \cdot W_8^k$$



Gambar 3.

$$X[k] = \sum_{n=1}^1 x[n] W_2^{nk}$$

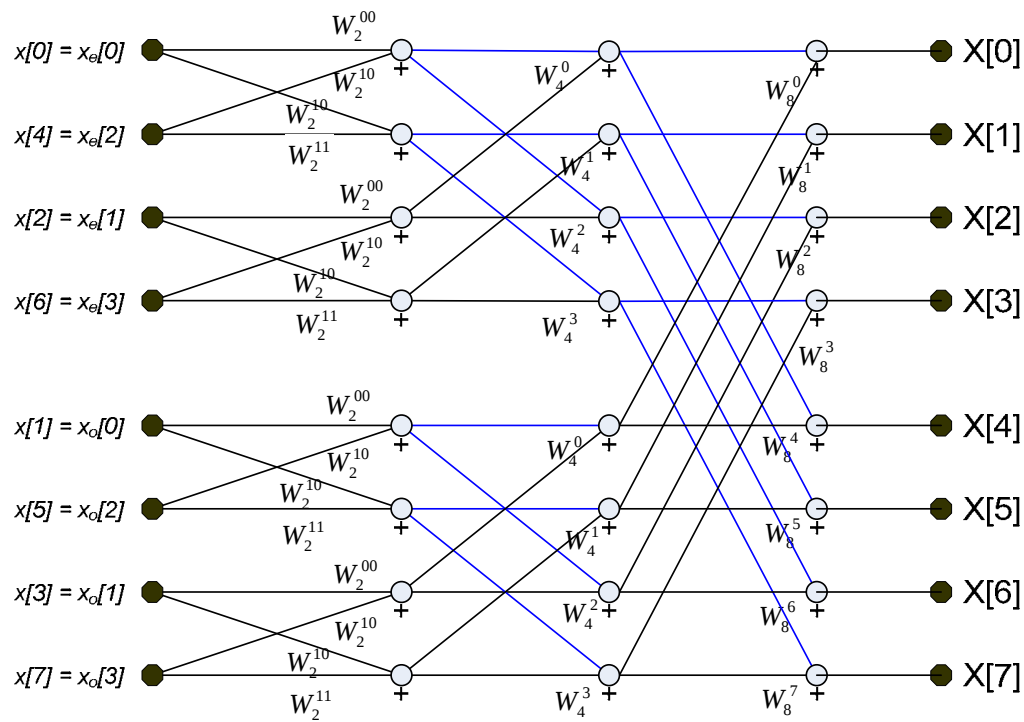
$$\Rightarrow X[0] = x[0] W_2^{00} + x[1] W_2^{10}$$

$$X[1] = x[0] W_2^{01} + x[1] W_2^{11}$$

Dekomposisi seperti langkah di atas terus dilakukan hingga unit terkecil DFT untung panjang-2 terbentuk. Sebuah DFT panjang 2 membentuk diagram kupu-kupu seperti terlihat pada Gbr 3.

Gambar diagram dapat dilihat pada Gbr. 4. Terlihat bahwa tingkat kerumitan dalam hal jumlah perkalian dan penjumlahan dapat dikurangi. Di sini jumlah perkalian dan penjumlahan berturut-turut adalah $(2 \times 2 \times 2 \times 2 + 4 \times 2) = 24$ dan $(2 \times 2 \times 2 + 4 \times 2 + 8) = 24$.

Inilah dekomposisi terkecil DFT untuk N=8.



Gambar 4.

Tabel 1 menunjukkan perbandingan jumlah operasi perkalian dan penjumlahan antara DFT langsung dengan setelah melalui dekomposisi menjadi FFT. Terdapat selisih penghematan operasi perkalian/penjumlahan yang signifikan pada FFT, sehingga operasi ini jauh lebih populer dibanding DFT secara langsung.

Tabel 1. Perbandingan jumlah perkalian penjumlahan DFT dan FFT

N	Jumlah perkalian/penjumlahan	
	DFT	FFT
2	2/2	2/2
4	12/12	8/8
8	56/56	24/24
16	$16^2-16/16^2-16$	64/64
N	N^2-N/N^2-N	$N \cdot \log N / N \cdot \log N$

REFERENCE

[1] _____, “6. Fast Fourier Transform, <http://www.eie.polyu.edu.hk/~enpkun/EIE327/FFT.pdf>