

Transformasi Fourier

Ibnu Pradipta, 07/252949/TK/33237
Firman Nanda, 07/257710/TK/33529
Jurusan Teknik Elektro & Teknologi Informasi FT UGM,
Yogyakarta

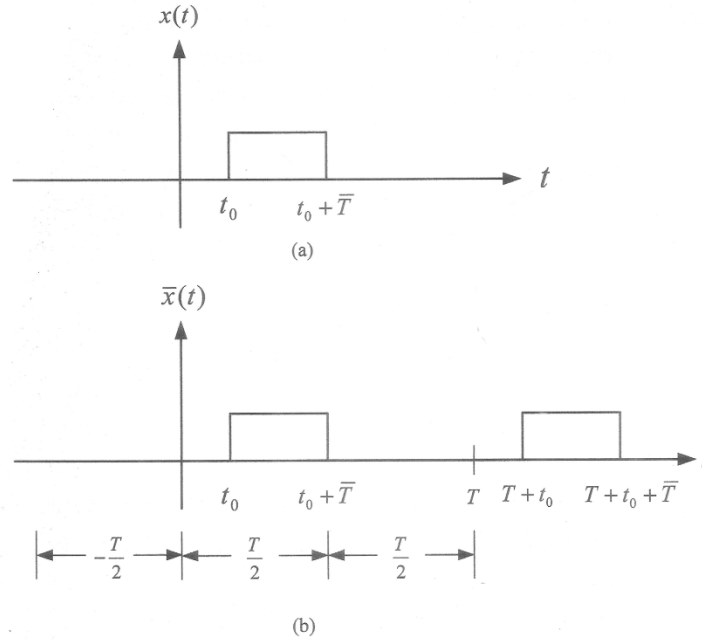
3.4 Transformasi Fourier

Untuk membandingkan gambaran dari deret fourier untuk sinyal yang periodik, *transformasi Fourier* digunakan untuk menunjukkan sinyal yang kontinyu dan bersifat tidak periodik sebagai superposisi dari gelombang sinus kompleks. Dimaksudkan bahwa sinyal periodik dapat direpresentasikan sebagai penjumlahan sinus dan cosinus dengan deret Fourier menghasilkan sinyal yang sangat kuat. Kita akan menyampaikan hasilnya dalam sinyal yang aperiodik. Penjabarandari deret Fourier ke sinyal aperiodik dapat diselesaikan dengan memperpanjang periodnya menjadi tak terbatas. Untuk mendekatinya, kita dapat mengasumsikan bahwa deret Fourier dari perluasan secara periodik dari sinyal yang tidak periodik $x(t)$ itu ada. Sinyal yang tidak periodik $x(t)$ didefinisikan dalam interfal $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ dengan $T > 0$. Artinya, $x(t) = 0$ berada pada luar interval ini. Kita dapat menghasilkan ekstensi periodik $\bar{x}(t)$ dari sinyal nonperiodik $x(t)$ dengan memilih T konstan dimana $T > 2(t_0 + T)$ untuk $lt_0 \geq -\frac{T}{2}$ dan $T > -2t_0$ untuk $lt_0 < -\frac{T}{2}$, dan menunjukkan

$$\bar{x}(t) = x(t), \text{ with } -\frac{T}{2} + kT \leq t \leq \frac{T}{2} + kT, \quad (3-85)$$

dimana k adalah setiap bilangan bulat tidak negatif, dan jelas T adalah periode dasar pengkonversinya, kita dapat mengekspresikan sinyal nonperiodik $x(t)$ dalam hal sinyal periodik dengan menggunakan

$$x(t) = \begin{cases} \bar{x}(t), & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3-86)$$



Gambar 3-1. Perubahan sinyal non periodik menjadi sinyal periodik: (a) $x(t)$ dan (b) $\bar{x}(t)$.

Diskusi di atas diilustrasikan dalam gambar 3-1.

Jika kita membiarkan periode T menjadi tak hingga, kemudian di limitkan, sinyal periodik akan dikurangi sinyal aperiodik. Yaitu :

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{x}(t). \quad (3-87)$$

Berdasarkan Definisi II, periode sinyal $x(t)$ dengan periode dasar $T = 1/f_0$ mempunyai eksponensial kompleks deret Fourier , yang diberikan

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (3-88)$$

Dimana

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{x}(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt. \quad (3-89)$$

Selama integrasi dari Rumus (3-89) terkait, integran dari integralnya dapat dituliskan

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{x}(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt. \quad (3-90)$$

Persamaan (3-90) berlaku karena Persamaan (3-86) dan (3-87).

Dalam Persamaan (3-90), kita memiliki kf_0 . kf_0 berbeda dan bentuk urutan diskrit nomor. Sebagai $T \rightarrow \infty$ f_0 menjadi lebih kecil dan lebih kecil sehingga kf_0 memiliki nilai berkelanjutan. Jadi, daripada mencari X_k untuk setiap lc berbeda, kita akan mencari $X(f)$ untuk masing-masing frekuensi f di mana f kontinu dan dapat mengasumsikan bernilai apapun. Yang akan kita lakukan adalah untuk menggeneralisasi rumusan untuk koefisien deret Fourier dalam (3-90). Generalisasi dilakukan dengan membuat integral sebagai fungsi frekuensi. Dalam pandangan; Persamaan (3-90), kita mendefinisikan fungsi frekuensi

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (3-91)$$

Dapat kita katakan bahwa $X(f)$ adalah transformasi Fourier dari $x(t)$ yang mengubah $x(t)$ dari domain waktu ke domain frekuensi. Berikut, kami akan menyajikan transformasi invers Fourier yang mengubah $X(f)$ kembali ke $x(t)$. Dengan menggunakan Persamaan (3-91), kita dapat menulis ulang persamaan (3-90) sebagai

$$X_k = \frac{1}{T} X(kf_0). \quad (3-92)$$

Persamaan (3-92) menunjukkan bahwa fungsi X adalah selubung dari deret Fourier X_k dengan diskalakan oleh T . Dengan mensubstitusikan Persamaan (3-92) dan $f_0 : 1/T$ ke Persamaan (3-88), kita mendapatkan

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(kf_0) e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0) e^{j2\pi k f_0 t f_0}. \quad (3-93)$$

Mengambil nilai limit dari persamaan (3-93) dan menggunakan persamaan (3-87), kita mendapatkan,

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0) e^{j2\pi k f_0 t f_0}. \quad (3-94)$$

Seperti yang kita bahas sebelumnya, $T \rightarrow \infty$, $f_0 \rightarrow 0$. Artinya, dalam limit tersebut, kita dapat menyimpulkan $kf_0 \rightarrow f$, $f_0 \rightarrow df$, dan penjumlahan dalam persamaan (3-94) menjadi sebuah integral. Dari Persamaan (3-94), kita memiliki

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (3-95)$$

Dapat kita katakan bahwa $x(t)$ adalah transformasi Fourier balik dari $X(f)$ yang mengubah $X(f)$ dari domain frekuensi kembali ke domain waktu.

Oleh karena itu, Persamaan (3-91) dan (3-95) merupakan generalisasi deret Fourier untuk sinyal nonperiodik. Ini disebut transformasi Fourier. Kita mengambil kesimpulan pengamatan ini dengan definisi sebagai berikut.

Definition III

Misalkan $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, merupakan sinyal sedemikian rupa sehingga benar-benar integrable, yaitu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

Kemudian transformasi Fourier transform dari $x(t)$ dinyatakan sebagai

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \triangleq F\{x(t)\}, \quad (3-96)$$

Dan invers transformasi Fourier didefinisikan sebagai

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \triangleq F^{-1}\{X(f)\}. \quad (3-97)$$

Hubungan satu-ke-satu antara sinyal $x(t)$ serta transformasi Fourier $X(f)$ membentuk Transformasi Fourier pasangan dengan notasi

$$x(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} x(f). \quad (3-98)$$

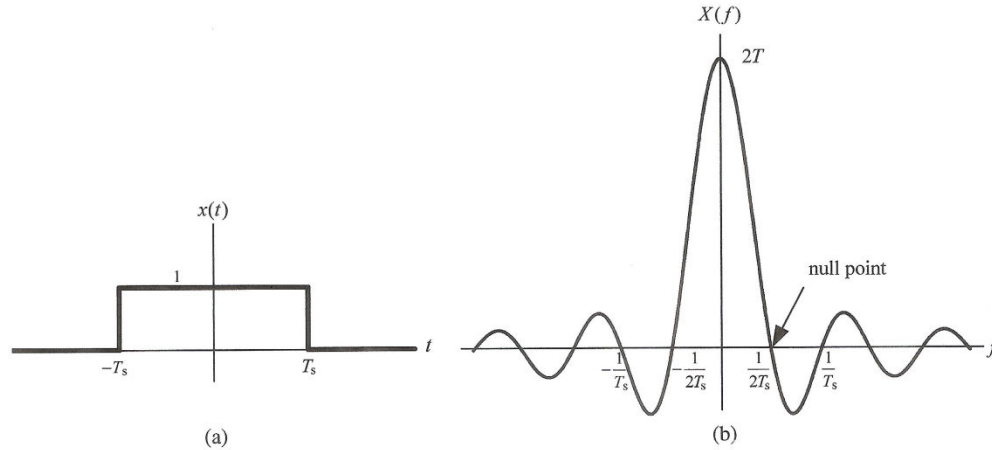
Mari kita periksa persamaan (3-96). Persamaan ini mendefinisikan transformasi Fourier. Seperti yang ditunjukkan oleh persamaan (3-96), transformasi Fourier mentransformasi fungsi $x(t)$, fungsi dalam waktu, untuk $X(f)$, fungsi dalam frekuensi. *Jadi Transformasi Fourier transformasi fungsi dalam domain waktu menjadi fungsi dalam domain frekuensi. Sebaliknya, invers Fourier mengubah fungsi dalam domain frekuensi ke dalam fungsi dalam domain waktu, seperti ditunjukkan dalam persamaan (3-97).*

(Perhatikan bahwa variabel f di Persamaan (3-96) dan (3-97) adalah variabel kontinu. Artinya, untuk setiap frekuensi f , kita memiliki X yang sesuai (f). Ini berbeda dari kasus deret Fourier di mana frekuensi ditentukan oleh kf_0 diskrit dimana $f_0 = 1/T$ adalah frekuensi dasar.

Contoh 3-1

Berdasarkan pulsa persegi digambarkan pada Gambar 3-2(a) yang didefinisikan sebagai

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T_s \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



Gambar 3-2. Pulsa gelombang kotak $x(t)$ (a) $x(t)$ dan (b) transformasi fourier $x(t)$

Kita akan menemukan transformasi Fourier dari $x(t)$. Pulsa persegi panjang $x(t)$ adalah mutlak disediakan terintegrasi $0 \leq T \leq \infty$. Untuk $f \neq 0$, kita memiliki

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-T_s}^{T_s} e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-T_s}^{T_s} \\
 &= \frac{1}{\pi f} \sin(2\pi f T_s).
 \end{aligned} \tag{3-99}$$

Untuk $f = 0$ integral dapat disederhanakan menjadi

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T}^T dt = 2T_s. \tag{3-100}$$

Menggunakan hukum L'Hopital kita dapat melihat bahwa

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{\pi f} \sin(2\pi f T_s) = \lim_{f \rightarrow 0} 2T_s \cos(2\pi f T_s) = 2T_s. \tag{3-101}$$

Maka kita menuliskan transformasi Fourier dari $x(t)$ untuk semua nilai f sebagai

$$X(f) = \frac{1}{\pi f} \sin(2\pi f T_s), \tag{3-102}$$

dengan pengertian bahwa nilai pada $f = 0$ diperoleh dengan mengevaluasi limitnya. Dalam hal ini, $X(f)$ bernilai riil. Hal ini digambarkan pada Gambar 3-2(b).

Melihat gambar 3-2(b). Perlu diingat bahwa spektrum transformasi Fourier berubah selama lebar pulsa berubah. Jika T_s bernilai besar, $1/2T_s$ bernilai kecil, sehingga komponen frekuensi rendahnya signifikan. Jika T_s sangat kecil, $1/2T_s$ akan besar, sehingga akan banyak komponen frekuensi tinggi yang masih signifikan. Seperti yang

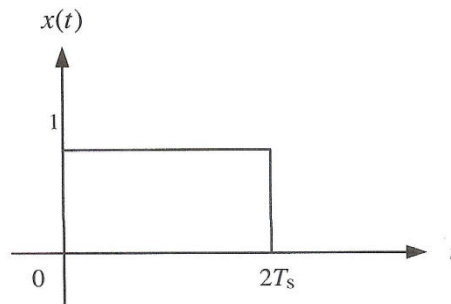
tampak pada gambar 3-2(b), poin pertama pada fungsi transformasi Fourier $X(f)$ memotong pusat frekuensi yang disebut dengan titik null. Jika titik ini besar, hal ini menunjukkan bahwa frekuensi dalam jumlah besar terlibat. Di sisi lain, jika titik nullnya kecil hal ini menunjukkan hanya ada kanal sempit dari frekuensi rendah yang terlibat. Perlu diingat, dalam kenyataannya sinyal digital ditransmisikan dalam bentuk pulsa. Jika kita membutuhkan sistem transmisi dengan pesat bit yang besar, lebar pulsa akan berukuran sangat kecil - Yang berarti keberadaan dari banyaknya sinyal frekuensi tinggi yang tidak bisa diabaikan. Hal ini akan memiliki efek terhadap performa jalur transmisi.

Contoh 3-2

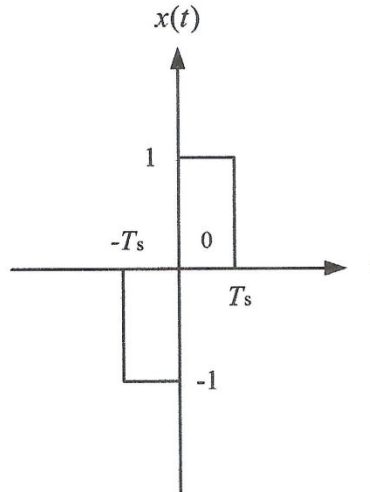
Mari kita lihat persamaan pada gambar 3-2(a) lagi. misalkan kita melakukan pergeseran waktu pada fungsi yang ditampilkan pada gambar 3-3. transformasi fourier dari fungsinya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_0^{2T_s} e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_0^{2T_s} \\
 &= \frac{(1 - e^{-j4\pi f T_s})}{j2\pi f} \\
 &= \frac{e^{-j2\pi f T_s}}{j2\pi f} (e^{j2\pi f T_s} - e^{-j2\pi f T_s}) \\
 &= e^{-j2\pi f T_s} \frac{1}{\pi f} \sin(2\pi f T_s)
 \end{aligned} \tag{3-103}$$

Membandingkan persamaan (3-103) dengan persamaan (3-99), satu yang bisa kita ketahui bahwa transformasi Fourier dari fungsi ini hampir sama dengan fungsi aslinya tanpa pergeseran fase, kecuali disini terdapat multiplier $e^{-j2\pi f T_s}$ dengan transformasi Fourier aslinya. Fenomena ini akan dijelaskan pada sesi berikutnya.



Gambar 3-3. Fungsi yang diperoleh dengan melakukan pergeseran waktu pada fungsi pada gambar 3-2



Gambar 3-4. Fungsi Ganjil

Contoh 3-3

Berdasarkan fungsi pada gambar 3-4, transformasi Fourier dihitung seperti berikut

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-T_s}^0 -e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{T_s} e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f} \Big|_{-T_s}^0 - \frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f} \Big|_0^{T_s} \\
 &= \frac{2 - (e^{-j2\pi fT_s} + e^{j2\pi fT_s})}{j2\pi f} \\
 &= \frac{1 - \cos(2\pi fT_s)}{j\pi f} \\
 &= 2 \frac{\sin^2(\pi fT_s)}{j\pi f}.
 \end{aligned} \tag{3-104}$$

3.5 Arti fisik Transformasi Fourier

Persamaan (3-96) menunjukkan bahwa Transformasi Fourier mentransformasi fungsi $x(t)$ dalam waktu domain ke fungsi $X(f)$ dalam domain frekuensi, Artinya, untuk setiap frekuensi f terdapat respon frekuensi yang sesuai X . Juga, untuk setiap frekuensi f selalu ada frekuensi negatif- f . Yang dimaksud dengan $X(f)$ dapat dilihat oleh persamaan berikut:

$$X(-f)e^{-j2\pi ft} + X(f)e^{j2\pi ft}. \tag{3-105}$$

Mari kita lihat Persamaan (3-102). Dalam kasus ini kita dapat dengan mudah melihat

$$X(-f) = X(f) = \frac{\sin(2\pi f T_s)}{\pi f}.$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} X(-f)e^{-j2\pi ft} + X(f)e^{j2\pi ft} \\ &= X(f)(e^{-j2\pi ft} + e^{j2\pi ft}) \\ &= \frac{2}{\pi f} \sin(2\pi f T_s) \cos(2\pi ft) \end{aligned} \quad (3-106)$$

Persamaan (3-106) sangat mirip dengan Persamaan (3-68), yang seharusnya tidak mengejutkan. Pertimbangkan Persamaan (3-104). Dalam kasus ini, kita dapat menunjukkan bahwa $X(-f) = -X(f)$ dan

$$\begin{aligned} X(-f)e^{-j2\pi ft} + X(f)e^{j2\pi ft} \\ &= X(f)(e^{j2\pi ft} - e^{-j2\pi ft}) \\ &= \frac{2\sin^2(\pi f T_s)}{j\pi f} 2j \sin(2\pi ft) \\ &= \frac{4\sin^2(\pi f T_s)}{\pi f} \sin(2\pi ft). \end{aligned} \quad (3-107)$$

Persamaan (3-107) sama persis dengan Persamaan (3-75) seperti yang diharapkan. Akhirnya, marilah kita mengetahui persamaan (3-103). Dalam hal ini

$$\begin{aligned} X(-f)e^{-j2\pi ft} + X(f)e^{j2\pi ft} \\ &= e^{j2\pi f T_s} \frac{\sin(2\pi f T_s)}{\pi f} e^{-j2\pi ft} + e^{-j2\pi f T_s} \frac{\sin(2\pi f T_s)}{\pi f} e^{j2\pi ft} \\ &= \frac{\sin(2\pi f T_s)}{\pi f} (e^{j2\pi f(t-T_s)} + e^{-j2\pi f(t-T_s)}) \\ &= \frac{\sin(2\pi f T_s) 2 \cos(2\pi f(t-T_s))}{\pi f} \\ &= \frac{2}{\pi f} \sin(2\pi f T_s) \cos(2\pi f(t-T_s)) \end{aligned} \quad (3-108)$$

Menarik untuk membandingkan Persamaan (3-108) dan (3-106). Kita dapat melihat bahwa Persamaan (3-107) dapat diperoleh hanya dengan menggantikan $t = t - T_s$ ke dalam persamaan (3-106). Hal ini merupakan perkecualian karena fungsi yang berhubungan dengan (3-108) adalah pergeseran waktu yang berkaitan dengan (3-106). Pembaca dianjurkan untuk merujuk pada gambar 3-17 (a) dan 3-18.

Dengan memeriksa Persamaan (3-97), kami mencatat bahwa setiap $X(f)$ dikaitkan dengan $e^{j2\pi f t}$. Akan mudah untuk membuktikan bahwa, jika $X(f) = a + jb = re^{j\theta}$, $X(-f) = a - jb = re^{-j\theta}$ dimana $\theta = \tan^{-1}(b/a)$. Dengan demikian, untuk setiap f seperti yang kita lakukan sebelumnya, kita dengan mudah dapat membuktikan bahwa

$$\begin{aligned}
& X(-f)e^{-j2\pi ft} + X(f)e^{j2\pi ft} \\
& = re^{-j\theta}e^{-j2\pi ft} + re^{j\theta}e^{j2\pi ft} \\
& = re^{-j(2\pi ft + \theta)} + re^{j(2\pi ft + \theta)} \\
& = 2r \cos(2\pi ft + \theta) \\
& = 2|X(f)| \cos(2\pi ft + \theta)
\end{aligned} \tag{3-109}$$

Dimana $\theta = \tan^{-1}(b/a)$.

Pada dasarnya, Transformasi Fourier menghasilkan sebuah fungsi $X(f)$ dalam domain frekuensi dari sebuah fungsi $x(t)$ dalam domain waktu. Baik variable t maupun f merupakan kontinu. Fungsi $x(t)$ terdiri dari sebuah seri tak terbatas dari $X(f)$ dan, untuk setiap f , $|X(f)|$ menunjukkan kekuatan, atau intensitas, dari fungsi $\cos(2\pi ft + \theta)$ yang sesuai dan $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ menunjukkan pergeseran fasa. Poin yang paling penting adalah bahwa setiap frekuensi f adalah terkait dengan fungsi kosinus.

Kita dapat menyimpulkan bagian ini dengan mengatakan bahwa Transformasi Fourier dapat dilihat sebagai alat analisis sedemikian rupa sehingga menghasilkan komponen frekuensi untuk setiap frekuensi f . Walaupun $X(f)$ dapat menjadi kompleks, ini masih sesuai dengan fungsi cosinus dengan pergeseran fasa tertentu.

3.6 Sifat Transformasi Fourier

Beberapa sifat yang berguna dari Transformasi Fourier akan disajikan di sini. Sifat-sifat ini memberikan kita wawasan dengan jumlah yang signifikan dalam mengubah dan dalam hubungan antara deskripsi domain-waktu dan frekuensi-domain dari suatu sinyal.

1. Linearitas

Pertimbangkan $z(t) = ax(t) + by(t)$ sebagai kombinasi linear dari dua sinyal, $x(t)$ dan $y(t)$, dimana a dan b adalah skalar. Transformasi Fourier $z(t)$ dihitung dengan merubah $x(t)$ dan $y(t)$ dalam pola transformasi Fourier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
Z(f) &= F\{ax(t) + by(t)\} \\
&= aF\{x(t)\} + bF\{y(t)\} \\
&= aX(f) + bY(f)
\end{aligned} \tag{3-110}$$

Properti linier dapat dengan mudah diperluas untuk kombinasi linear dari sejumlah sinyal. Properti ini jelas berlaku untuk invers Fourier transform.

2. Time Shift

Biarkan $z(t) = x(t - t_0)$ menjadi versi *time-shifted* dari $x(t)$, di mana t_0 adalah bilangan real. Tujuannya adalah untuk mengaitkan Transformasi Fourier $z(t)$ dengan Transformasi Fourier $x(t)$.

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j2\pi ft} dt. \tag{3-111}$$

Menunjukkan perubahan variable $\tau = t - t_0$, diperoleh

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= e^{-j2\pi f t_0} X(f). \end{aligned} \quad (3-112)$$

Hasil pengalihan waktu dengan t_0 adalah untuk mengalikan transformasi dengan $e^{-j2\pi f t_0}$. Ini berarti bahwa sinyal yang bergeser dalam waktu tidak mengubah besarnya magnitudo Transformasi Fourier tetapi menginduksi dalam transformasi sebuah pergeseran fasa, yaitu $-2\pi f t_0$.

Sebuah rumus bermanfaat yang terkait adalah sebagai berikut:

$$F^{-1}\{e^{-j2\pi f t_0} X(f)\} = x(t - t_0). \quad (3-113)$$

Pembaca mungkin bingung dengan apa arti $e^{-j2\pi f t_0} X(f)$. Mari $X'(f) = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$ dan $X(f) = r e^{j\theta}$, dengan r dan θ adalah fungsi dari f . Kemudian $X(-f) = r e^{-j\theta}$ karena $X(-f)$ dan $X(f)$ adalah konjugat satu sama lain, $X'(f) = r e^{-j2\pi f t_0} e^{j\theta}$ dan $X'(-f) = r e^{j2\pi f t_0} e^{-j\theta}$. Kita sekarang menghitung

$$\begin{aligned} &e^{j2\pi f t} X'(f) + e^{-j2\pi f t} X'(-f) \\ &= e^{j2\pi f(t-t_0)} X(f) + e^{-j2\pi f(t-t_0)} X(-f) \\ &= r(e^{j(2\pi f(t-t_0)+\theta)} + e^{-j(2\pi f(t-t_0)+\theta)}) \\ &= 2r \cos(2\pi f(t-t_0) + \theta) \end{aligned} \quad (3-114)$$

Persamaan (3-114) menunjukkan bahwa perkalian $X(f)$ dengan $e^{-j2\pi f t_0}$ menghasilkan pergeseran waktu dalam domain waktu.

3. Frekuensi Shift

Dalam sifat 2 di atas, kita beranggapan pengaruh pergeseran waktu pada representasi frekuensi-domain. Sekarang kita mempertimbangkan efek dari pergeseran frekuensi pada sinyal waktu-domain. Mengingat $x(t)$ merupakan Transformasi Fourier-nya adalah $X(f)$. Misalkan kita melakukan pergeseran frekuensi. Kita memiliki $X(f - \alpha)$. Pertanyaannya adalah: Apa yang invers transformasi yang bersesuaian, yaitu dalam domain waktu, $X(f - \alpha)$? Yaitu kita akan mengungkapkan transformasi Fourier dari $Z(f) = X(f - \alpha)$ dalam hal $x(t)$, di mana α adalah bilangan real. Dengan definisi Transformasi Fourier, kita memiliki

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f - \alpha) e^{j2\pi f t} df.$$

Melakukan substitusi variabel $v = f - \alpha$, kita mendapatkan

$$\begin{aligned}
z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(v) e^{j2\pi(v+\alpha)t} dv \\
&= e^{j2\pi\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} X(v) e^{j2\pi vt} dv \\
&= e^{j2\pi\alpha t} x(t).
\end{aligned}
\tag{3-115}$$

Maka hasil pengalihan frekuensi oleh α sesuai dengan kelipatan dalam domain waktu oleh sinusoida kompleks $e^{j2\pi\alpha t}$.

Sebuah rumus yang terkait yang bermanfaat adalah sebagai berikut:

$$F\{e^{j2\pi\alpha t} x(t)\} = X(f - \alpha). \tag{3-116}$$

Arti persamaan (3-115) mungkin membingungkan karena sulit untuk memahami arti fisik dari $e^{j2\pi\alpha t} x(t)$. Perhatikan bahwa $x(t)$ adalah fungsi nyata. Fungsi $e^{j2\pi\alpha t} x(t)$ berisi bagian imajiner. Apa artinya bagian imajiner ini? Hal ini dapat dijelaskan dengan mencatat

$$e^{j2\pi\alpha t} + e^{-j2\pi\alpha t} = 2 \cos(2\pi\alpha t)$$

dan

$$(e^{j2\pi\alpha t} + e^{-j2\pi\alpha t})x(t) = 2 \cos(2\pi\alpha t)x(t).$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
F(\cos(2\pi\alpha t)x(t)) &= \frac{1}{2} (F\{e^{j2\pi\alpha t} x(t) + e^{-j2\pi\alpha t} x(t)\}) \\
&= \frac{1}{2} (X(f - \alpha) + X(f + \alpha))
\end{aligned}
\tag{3-117}$$

Persamaan (3-117) menunjukkan bahwa jika kita kalikan fungsi $x(t)$ dengan $\cos(2\pi\alpha t)$, efek bersih adalah bahwa frekuensi sinyal asli $x(t)$ akan bergeser. Untuk setiap frekuensi f pada $x(t)$, akan ada dua frekuensi baru: $f - \alpha$ dan $f + \alpha$.

Kita dapat mempertimbangkan masalah dengan cara lain. Transformasi Fourier memberitahu kita bahwa fungsi $x(t)$ terdiri dari fungsi kosinus. Pertimbangkan fungsi sembarang $x(t) = \cos(2\pi f t + \theta)$. Jika $x(t)$ dikalikan dengan $\cos(2\pi\alpha t)$, $\cos(2\pi f t + \theta)$ menjadi $\cos(2\pi f t + \theta) \cos(2\pi\alpha t)$. Tetapi kita dapat menyatakan:

$$\begin{aligned}
&\cos(2\pi f t + \theta) \cos(2\pi\alpha t) \\
&= \frac{1}{2} \{\cos(2\pi(f + \alpha)t + \theta) + \cos(2\pi(f - \alpha)t + \theta)\}.
\end{aligned}
\tag{3-118}$$

Dengan menggunakan baris ini penalaran kita dapat melihat bahwa setiap frekuensi f menjadi $f + \alpha$ dan $f - \alpha$.

Jadi, meskipun $e^{j2\pi\alpha t}x(t)$ tidak bermakna fisik, $\cos(2\pi\alpha t)x(t)$ memiliki arti fisik. Seperti yang akan kita lihat pada bab berikutnya, ketika kita memodulasi sinyal $x(t)$, kita kalikan dengan $\cos(2\pi f_c t)$ untuk beberapa frekuensi f_c . Oleh karena itu Persamaan (3-116) berguna bagi kita untuk mencari transformasi Fourier dari $\cos(2\pi f_c t)x(t)$.

4. Konvolusi

Konvolusi $z(t)$ dari dua sinyal $x(t)$ dan $y(t)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$z(t) \triangleq x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau. \quad (3-119)$$

Operasi Konvolusi adalah komutatif, yaitu, $x(t)*y(t) = y(t)*x(t)$. Berikut ini, marilah kita mencoba untuk mencari transformasi Fourier dari $z(t)$.

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)Y(f)e^{-j2\pi\tau f} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j2\pi\tau f} d\tau \right] Y(f) \\ &= X(f)Y(f). \end{aligned} \quad (3-120)$$

Sehingga kita memiliki

$$z(t) = x(t) * y(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} Z(f) = X(f)Y(f). \quad (3-121)$$

Ini adalah sifat penting yang dapat digunakan untuk menganalisis perilaku input-output dari sistem linier dalam domain frekuensi menggunakan perkalian transformasi Fourier bukan konvolusi sinyal waktu. Arti fisik konvolusi akan menjadi jelas setelah kita telah memperkenalkan konsep modulasi.

5. Modulasi

Properti modulasi sini mengacu pada perkalian dua sinyal, salah satu perubahan sinyal atau "memodulasi" amplitudo yang lain. Kita ingin mengekspresikan Transformasi Fourier produk $z(t) = x(t)y(t)$ dalam pola transformasi Fourier dari sinyal $x(t)$ dan $y(t)$. Mari kita merepresentasikan $x(t)$ dan $y(t)$ dalam hal transformasi Fourier mereka masing-masing dalam hal berikut:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(v)e^{j2\pi vt} dv$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\eta)e^{j2\pi \eta t} d\eta.$$

Istilah produk, $z(t)$, sehingga dapat ditulis dalam bentuk

$$z(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(v)e^{j2\pi vt} dv \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} Y(\eta)e^{j2\pi \eta t} d\eta \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(v)Y(\eta)e^{j2\pi(v+\eta)t} dv d\eta. \quad (3-122)$$

Melakukan perubahan variable η dan menggantikannya $\eta = f - v$, kita mendapatkan

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(v)Y(f-v)dv \right) e^{j2\pi ft} df.$$

Bagian integral dari v dalam persamaan di atas merupakan konvolusi $X(f) * Y(f)$. Karena itu, sinyal termodulasi $z(t)$ dapat ditulis kembali sebagai

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (X(f) * Y(f)) e^{j2\pi ft} df, \quad (3-123)$$

Waco memberitahu kita bahwa $z(t)$ adalah invers Transformasi Fourier $X(f)*Y(f)$. Untuk kata lain, kita dapat mengatakan bahwa Transformasi Fourier $z(t) = x(t)y(t)$ adalah $X(f)*Y(f)$. Hasil ini menunjukkan bahwa perkalian dua sinyal dalam domain waktu mengarah pada konvolusi dari mereka mengubah dalam domain frekuensi, seperti yang ditunjukkan oleh

$$z(t) = x(t)y(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} Z(f) = X(f) * Y(f). \quad (3-124)$$

Dua yang terakhir merupakan sifat yang sangat penting dalam analisis transformasi Fourier. Kita dapat menyimpulkan bahwa konvolusi dalam domain waktu diubah untuk modulasi dalam domain frekuensi, dan modulasi dalam domain waktu ditransformasikan ke konvolusi dalam domain frekuensi, yang ditunjukkan dalam persamaan (3-121) dan (3-124) masing-masing.

Karena tidak berarti mudah untuk memahami arti fisik konvolusi, sekarang akan diberikan penjelasan melalui contoh.

Contoh 3-4

Diketahui $x(u) = 1$ untuk $-1 \leq u \leq 1$ dan $x(u) = 0$ setiap tempat lain, dan $y(u) = 1 - u$ untuk $0 \leq u \leq 1$ dan $y(u) = 0$ setiap tempat lain. Fungsi $x(u)$ dan $y(u)$ diilustrasikan dalam gambar 3-2(a) dan 3-2(b).

Gambar 3-2(c) menunjukkan $y(t - u) = 1 - (t - u) + u$ untuk beberapa konstan t . Seperti ditunjukkan, $y(t - u)$ diperoleh oleh dua operasi. Pertama, $y(u)$ terbalik. Kedua, $y(u)$ meluncur baik ke kiri (saat t negative) atau ke kanan (ketika t adalah positif). Karena itu kita dapat membayangkan bahwa $y(t - u)$ meluncur dari minus tak terhingga hingga plus tak terhingga seperti yang kita hitung

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t - u)du.$$

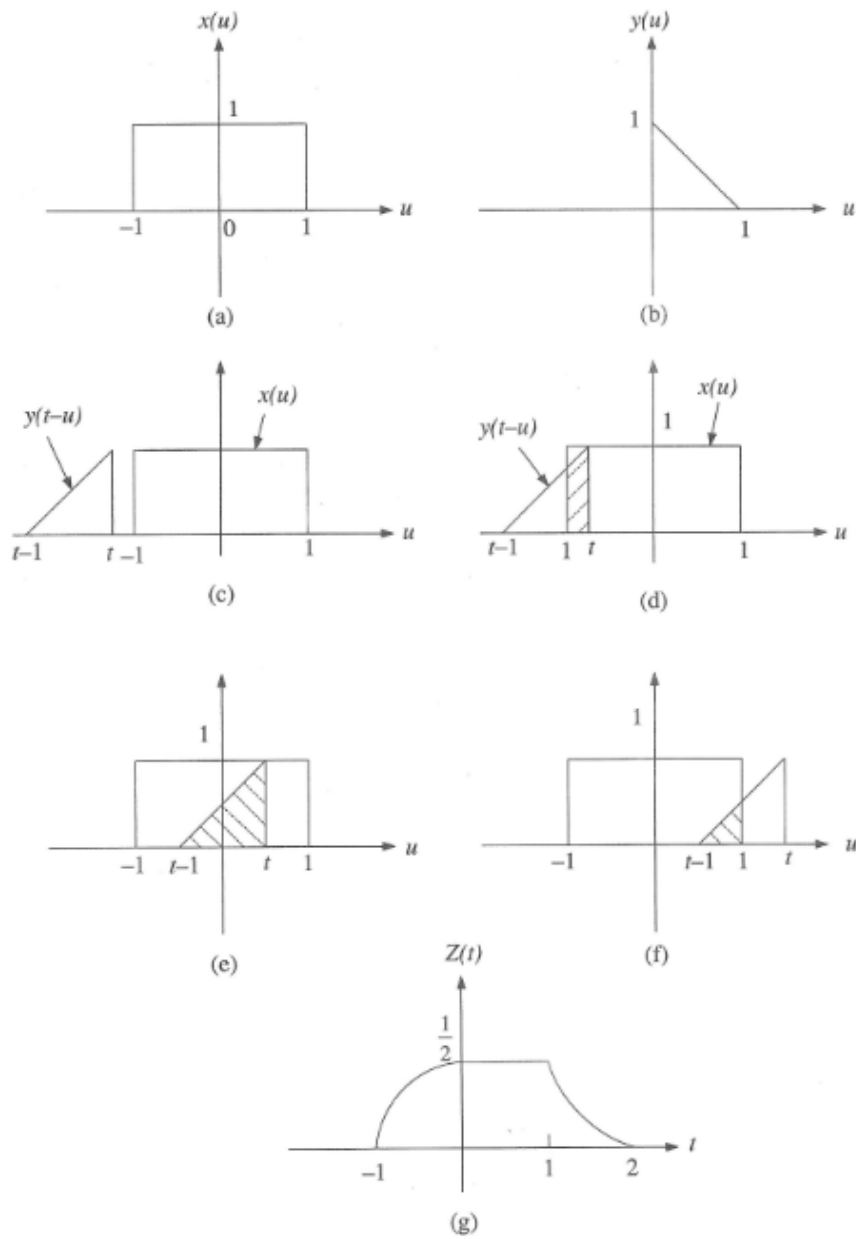
Ada kasus berbeda berikut.

Kasus 1: $-\infty \leq u < -1$ ($-\infty \leq t < -1$). Dalam hal ini $z(t) = 0$.

Kasus 2: $-1 \leq u < 0$ ($-1 \leq t < 0$). Dalam hal ini, $x(u) = 1$ berpotongan dengan $y(t - u)$ dan

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t - u)du$$

mulai untuk memiliki beberapa nilai karena hal ini benar-benar menghitung daerah sesuai dengan persimpangan $x(u)$ dan $y(t - u)$ untuk sebuah t tertentu,, seperti digambarkan pada Gambar 3-2(d).



Gambar 3-5. Contoh konvolusi: (a) $x(u)$; (b) $y(u)$; (c) Kasus 1: $y(t-u)$; (d) Kasus 2; (e) Kasus 3; (f) Kasus 4; (g) $z(t) = x(t) * y(t)$

Jadi di wilayah ini, kita mengintegrasikan dari $u = -1$ untuk $u = t$ dan kita memiliki

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-1}^t 1(1 - (t - u)) du \\ &= (1 - t)u + \frac{1}{2}u^2 \Big|_{-1}^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-t)t + \frac{1}{2}t^2 - (1-t)(-1) - \frac{1}{2}(-1)^2 \\
&= t - t^2 + \frac{1}{2}t^2 + 1 - t - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1 - t^2).
\end{aligned}$$

Kasus 3: $0 \leq u \leq 1$ ($0 \leq t \leq 1$). Sebagai $y(t - u)$ bergeser dari $t = 0$ ke $t = 1$, daerah tersebut dipotong oleh $x(u)$ dan $y(t - u)$ tetap sama, seperti digambarkan pada Gambar 3-5(e). Pada $t = 0$, $z(t) = x(t)*y(t) = 1/2$. Jadi $z(t)$ adalah $1/2$ di wilayah ini.

Kasus 4: $1 \leq u \leq 2$ ($1 \leq t \leq 2$). Dalam kasus ini, seperti digambarkan pada Gambar 3-5(f), kita mengintegrasikan dari $u = t - 1$ untuk $u = 1$.

$$\begin{aligned}
z(t) &= \int_{t-1}^1 x(u)y(t-u)du \\
&= \int_{t-1}^1 (1-t+u)du \\
&= u - tu + \frac{1}{2}u^2 \Big|_{t-1}^1 \\
&= \left(1-t+\frac{1}{2}\right) - \left((t-1) - t(t-1) + \frac{1}{2}(t-1)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2 \\
&= \frac{1}{2}(t-2)^2.
\end{aligned}$$

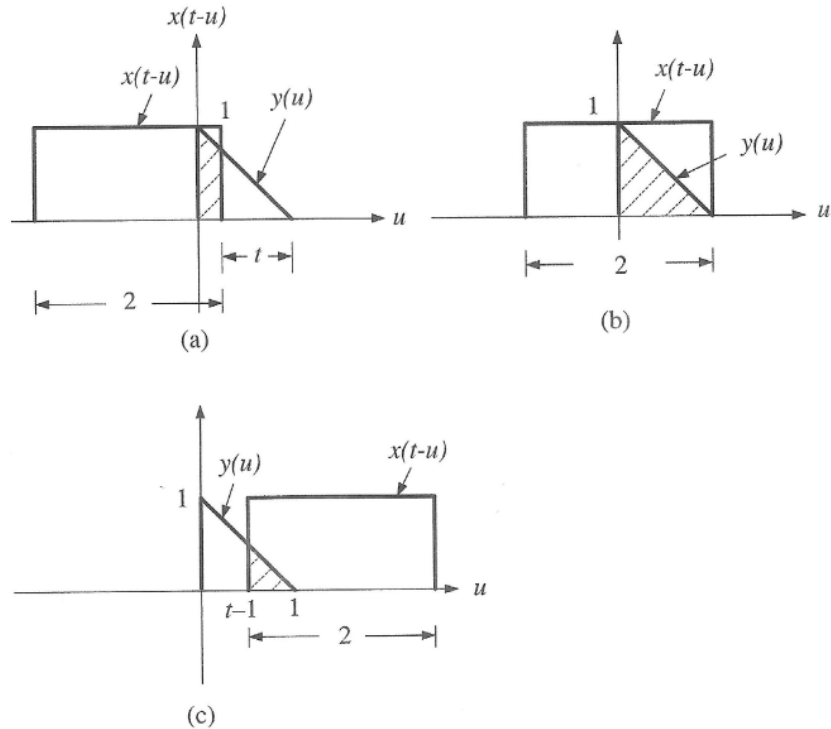
Kasus 5: $2 \leq u \leq \infty$ ($2 \leq t \leq \infty$). Dalam hal ini $z(t) = 0$.

*Final $z(t) = x(t)*y(t)$ sekarang diilustrasikan pada Gambar 3-5(g). Perhatikan bahwa konvolusi memiliki beberapa efek smoothing. $x(u)$ awalnya memiliki tepi tajam. Sekarang mereka pergi. Juga, fungsi tersebut diratakan dan melebar. Awalnya, lebar $x(u)$ adalah 2; sekarang 3. Tinggi $x(u)$ juga berkurang dari 1 sampai $1/2$.*

Seperti yang kita ditunjukkan sebelumnya, konvolusi adalah simetris dalam arti bahwa

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t).$$

Oleh karena itu, untuk kasus di Contoh 3-5, kita juga dapat memperbaiki $y(u)$ dan geser $x(u)$ dari $-\infty$ ke kanan. Ada tiga kasus lagi untuk $x(t - u)y(u)$ tidak 0, seperti yang digambarkan dalam Gambar 3-6(a), 3-6(b) dan 3-6(c).



Gambar 3-6. Konvolusi dari perspektif lain

Dalam konvolusi $x(t)*y(t)$, kita dapat mempertimbangkan $x(u)$ sebagai scanner scanning fungsi $y(u)$ dari kiri ke kanan dan pelaporan hasilnya. Konsep ini akan berguna ketika kita mempelajari modulasi amplitudo. Mari kita sekarang ini merangkum sifat-sifat yang disebutkan dalam bagian ini sebagai berikut:

1. Linearitas

$$F(ax(t) + by(t)) = aX(f) + bY(f).$$

$$F^{-1}(aX(f) + b(Y(f))) = ax(t) + by(t).$$

2. Time Shift

$$F(x(t - t_0)) = e^{-j2\pi ft_0} X(f).$$

$$F^{-1}(e^{-j2\pi ft_0} X(f)) = x(t - t_0).$$

3. Frekuensi Shift

$$F^{-1}(X(f - \alpha)) = e^{j2\pi \alpha t} x(t).$$

$$F(e^{j2\pi \alpha t} x(t)) = X(f - \alpha).$$

4. Konvolusi

$$F(x(t) * y(t)) = X(f)Y(f).$$

$$F^{-1}(X(f)Y(f)) = x(t) * y(t).$$

5. Modulation

$$F(x(t)y(t)) = X(f) * Y(f).$$

$$F^{-1}(X(f) * Y(f)) = x(t)y(t).$$

REFERENSI

- [1] R.C.T. Lee, Mao-Ching Chiu, and Jung-Shan Lin, “Communications Engineering,” Jhon Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd. 2007.