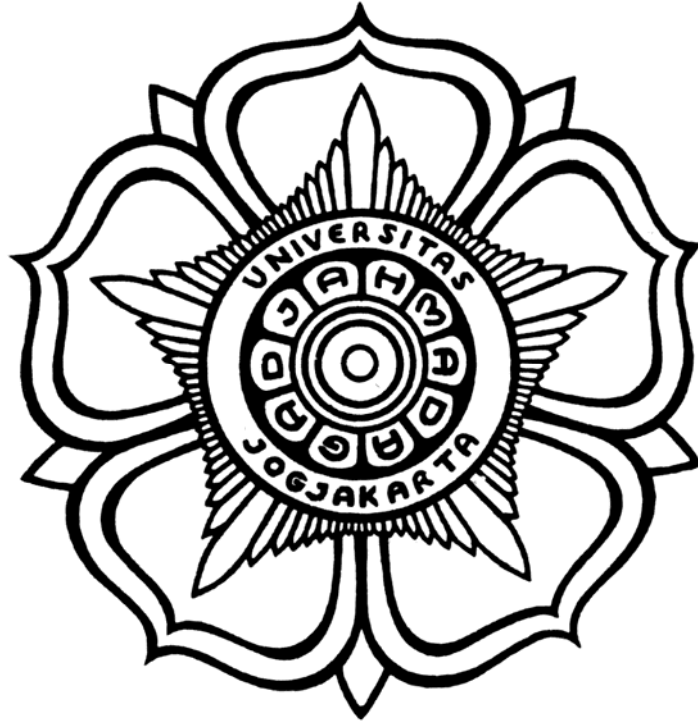


REPRESENTASI ISYARAT-ISYARAT FOURIER



Ridzky Novasandro (32349)

Yodhi Kharismanto (32552)

Theodorus Yoga (34993)

Jurusan Teknik Elektro dan Teknologi Informasi

Fakultas Teknik

Universitas Gadjah Mada

3. REPRESENTASI ISYARAT-ISYARAT FOURIER

Dalam bab ini, konsep mewakili isyarat di time domain dan frequency-domain. Biasanya isyarat digambarkan sebagai fungsi dari waktu. Namun, ada beberapa keuntungan jika isyarat dapat dinyatakan dalam domain frekuensi. Untuk mewakili di kedua domain waktu dan domain frekuensi dari hasil pengenalan dari hubungan rangkaian sinusoid harmonik. Studi tentang isyarat dan sistem yang menggunakan representasi sinusoidal disebut transformasi Fourier analysis. Metode fourier termasuk Fourier series dan transformasi Fourier untuk waktu kontinyu dan diskrit mempunyai aplikasi luas di hampir semua cabang di bidang teknik dan sains.

3.1 Fourier Series

Fourier series digunakan untuk merepresentasikan waktu kontinyu dengan isyarat periodis sebagai superposisi pada gelombang sinusoidal. Sebelum memulai dengan turunan dari fourier series, kita akan memperkenalkan beberapa konsep tentang isyarat

3.1.1 Isyarat-isyarat periodis

Isyarat waktu kontinyu $x(t)$ dikatakan periodis jika terdapat konstanta positif T :

$$x(t) = x(t + nT) \text{ for all } t$$

Dimana T adalah periode dari isyarat. Setiap isyarat $x(t)$ dimana tidak ada nilai dari T yang dapat memenuhi persamaan diatas, disebut isyarat aperiodic atau nonperiodic. Isyarat periodik mempunyai beberapa karakteristik:

1. isyarat $x(t)$ yang periodis dengan periode T juga periodis dengan nT dimana n adalah semua nilai positif, yaitu

$$x(t) = x(t + nT) \text{ for all } t$$

2. Kita mendefinisikan hal mendasar periode T_0 sebagai nilai terkecil dari periode T yang memenuhi persamaan di atas. Frekuensi f_0 didefinisikan sebagai $f_0 = 1/T_0$. Jika tidak ada kesalahan yang muncul, kita bisa menggunakan T sehingga $f_0 = 1/T$.
3. T didefinisikan dalam sekon, dan f dalam Hertz(hz), yaitu siklus per sekon.

3.1.2 Orthogonalitas dari Sinusoidal

Orthogonality dari sinusoidal berperan penting dalam fourier representation. Dua isyarat dikatakan orthogonal jika mempunyai inner productnya bernilai 0. Inner product dari dua isyarat dengan periode T didefinisikan oleh integrasi dari inner product tersebut dengan interval T seperti yang tertulis di bawah ini

$$\int_0^T x(t) y(t) dt = 0$$

3.1.3 Derivasi dari Fourier Series

Kita mulai turunan dari fourier series dengan menganggap isyarat periodis $x(t)$ mempunyai periode $T = 1/f_0$ dengan menggunakan persamaan berikut :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi k f_0 t)$$

Dimana a_0 , a_k , dan b_k , adalah koefisien yang konstan. Kita berasumsi kita dapat mencari koefisien tersebut sehingga $x(t) = x(t + T)$. Lalu kita mempunyai :

$$x(t) = x(t + T)$$

(1) $O(t) = 1$ dipilih untuk komputasi mencari a_0 , kita dapatkan:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

(2) $O(t) = \cos()$ dengan berbagai nilai positif untuk n dipilih untuk komputasi mencari a_k , kita dapatkan:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

(3) $O(t) = \sin()$ dengan berbagai nilai positif untuk n dipilih untuk komputasi mencari nilai b_k , we have:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

Definition I

Kita asumsikan bahwa $x(t)$ $-\infty < t < \infty$ adalah isyarat periodis dengan periode $T = 1/f_0$, dimana f_0 adalah frekuensi dasar. Jika terdapat convergent series dalam bentuk :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Yang koefisiennya menggunakan persamaan berikut:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$c_{-k} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt$$

Lalu serial tersebut disebut fourier series representation dari isyarat $x(t)$. Pada umumnya, fourier series dalam bentuk ini diklasifikasikan sebagai trigonometric fourier series.

3.2 Pengembangan Cosine-only pada Fourier Series

Walaupun fourier series mungkin terkandung fungsi kosinus dan sinus, kita harus memikirkan bahwa fourier series mungkin terdapat hanya fungsi kosinus. Untuk semua $k \neq 0$, dimana persamaan

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad \text{dan} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}$$

Kita mempunyai persamaan :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \right]$$

Untuk mendapatkan persamaan di atas, persamaan tersebut tersirat bahwa fourier series dapat diekspresikan dengan :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \right]$$

Istilah ϕ_k adalah pergeseran fase (phase shift). Sehingga fungsi periodis sebenarnya adalah persamaan dari fungsi kosinus dengan frekuensi $k\omega_0$ dan phase shift ϕ_k . Kita mungkin melihat fourier series representation dari fungsi periodis sebagai pengembangan kosinus. Terdapat beberapa kasus terkait dengan ϕ_k

Case 1 : $\phi_k = 0$ Hal ini terjadi saat $b_k = 0$. Dalam hal ini, ada fungsi kosinus dengan frekuensi $k\omega_0$ tanpa ada phase shift.

Case 2 : $\phi_k = \frac{\pi}{2}$ Hal ini terjadi saat $a_k = 0$. Dalam hal ini, ada fungsi kosinus dengan frekuensi $k\omega_0$ yang menjadi fungsi sinus dengan frekuensi $k\omega_0$ tanpa ada phase shift.

3.3 Fourier Series dalam Complex Exponentials

Fourier series mengandung fungsi kosinus. Sejak fungsi kosinus dan sinus sangat terkait dengan eksponensial bilangan kompleks, bentuk yang lain dari seri Fourier dari seri Fourier trigonometri terdiri dari jumlah waktu kompleks bentuk gelombang eksponensial.

Kartesian dari bentuk persegi untuk z adalah

$$z = x + jy$$

Representasi dari bilangan kompleks dapat dicari dari rumus euler's :

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Hubungan untuk mengkonversi bentuk rectangular ke koordinat polar adalah:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ dan } \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Dan hubungan untuk mengkonversi polar ke rectangular koordinat adalah:

$$x = r \cos \theta \text{ dan } y = r \sin \theta$$

Dari definisi Euler's, kita dapatkan

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Dan kita dapatkan identitas:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \text{ dan } \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Representasi Complex Exponential dari Fourier Series

secara umum, kami ingin menyampaikan deret Fourier dalam bentuk eksponensial kompleks karena terdiri dari fungsi eksponensial kompleks waktu dalam bentuk fungsi $e^{j\omega t}$, sehingga selalu tetap mempertahankan bentuk yang sama setelah diferensiasi dan integrasi. Untuk mengekspresikan fungsi waktu sinusoidal sebagai kombinasi linear waktu eksponensial kompleks bentuk gelombang dengan koefisien kompleks, kita dapat mengganti $\cos \omega t$ dan $\sin \omega t$ di mana k adalah interger apapun, di dalam persamaan menghasilkan

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Sekarang, kita akan mendapatkan exponential fourier series dari seri Fourier trigonometri dalam definisi I. Ada tiga kasus:

Case 1 : $k = 0$, kita dapatkan

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

Case 2 : $k > 0$, kita dapatkan

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j k t} dt$$

Case 3 : $k < 0$, kita dapatkan

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j k t} dt$$

Dari ketiga persamaan di atas, kita dapatkan

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j k t} dt$$

Definiton II

Misalkan $x(t)$, $-\infty < t < \infty$ yang merupakan isyarat periodik dengan periode fundamental. jika terdapat serangkaian konvergen dalam bentuk :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j k \omega_0 t}$$

Dimana koefisiennya dapat dikomputasi dari :

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt$$

Lalu serialnya disebut complex exponential fourier series representation dari isyarat $x(t)$

Seperti dalam kasus di mana seri Fourier adalah dalam bentuk trigonometri, ada kasus khusus untuk bentuk eksponensial

Case 1 : $\phi_k = 0$. Hal ini terjadi ketika $b_k = 0$. Dalam kasus ini, ada fungsi kosinus dengan frekuensi $k\omega_0$ tanpa phase shift.

Case 2 : $\phi_k = \frac{\pi}{2}$. Hal ini terjadi ketika $a_k = 0$. Dalam hal ini, fungsi kosinus dengan frekuensi $k\omega_0$ menjadi fungsi sinus dengan frekuensi $k\omega_0$ tanpa phase shift.

3.4 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier digunakan untuk mewakili sebuah waktu kontinu non-periodis sebagai sebuah fungsi sinus kompleks. Pada transformasi Fourier ini, dimisalkan pada sebuah isyarat non-periodis mempunyai jangkauan waktu yang tidak terbatas. Untuk mencapai keadaan tersebut, kita memisalkan terdapat ekstensi periodis dari isyarat non-periodis. Pada isyarat non-periodis ditentukan nilai $x(t)$ pada interval t_0 sampai $t_0 + T$. Di luar interval ini, $x(t)$ bernilai 0. Kita dapat membangkitkan ekstensi periodis dari isyarat non-periodis $x(t)$ dengan memilih T konstan dengan

$\bar{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$ dan itu menunjukkan:

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$$

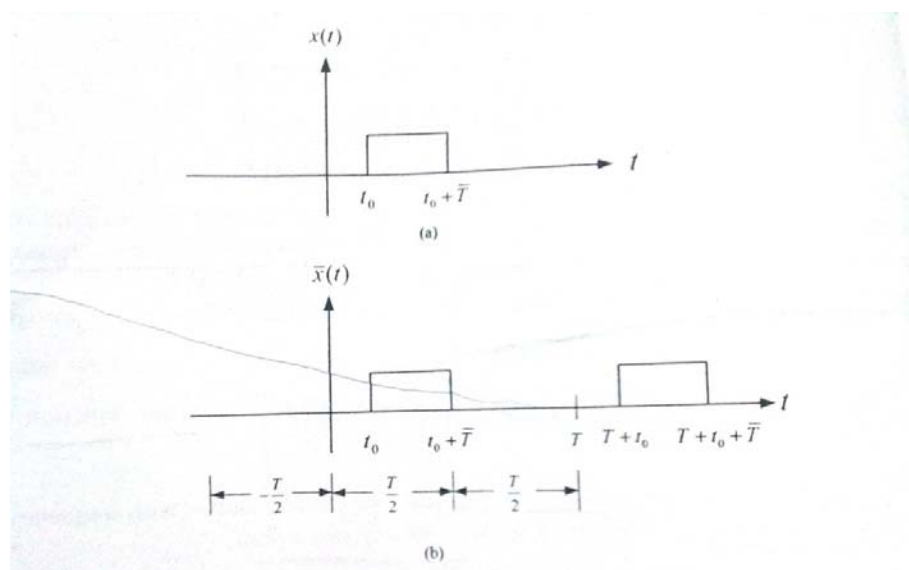
k = menunjukkan nilai non-negatif dan T = periode mendasar pada $\bar{x}(t)$.

Kita dapat mengekspresikan isyarat non-periodis dalam hal isyarat periodis $\bar{x}(t)$ dengan menggunakan:

$$x(t) = \bar{x}(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$$

Berdasarkan gambar di bawah ini, kita menentukan T mendekati tidak terbatas, sehingga isyarat periodis menjadi isyarat non-periodis. Sehingga:

Gambar di bawah ini menunjukkan : (a). $x(t)$ dan (b). $\bar{x}(t)$



Dari definisi sebelumnya yang kita kenal, $T = \frac{1}{f_0}$ mempunyai eksponensial kompleks dari deret Fourier,

yaitu: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k t / T}$ di mana $c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k t / T} dt$.

Sehingga dari integrasi di atas, dapat kita tulis:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k t / T} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - kT) dt$$

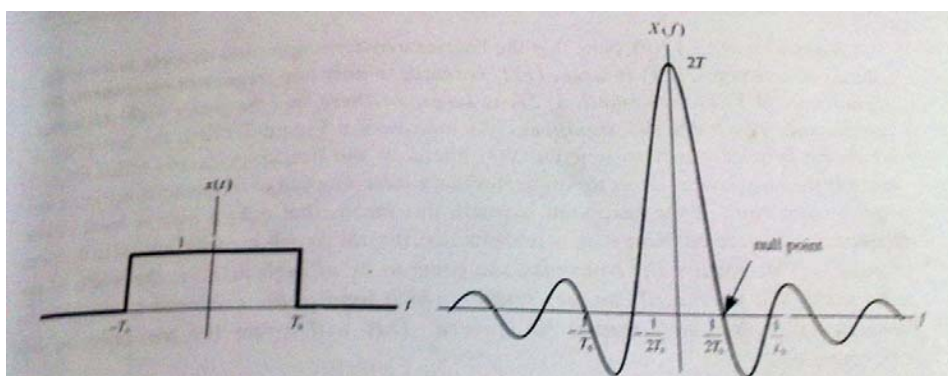
Karena T adalah tidak terbatas pada integrasi di atas, maka $\frac{1}{T}$ dapat menjadi sangat kecil sehingga dapat diabaikan. Sehingga kita dapatkan rumus yang merupakan **transformasi Fourier dari domain waktu ke domain frekuensi**:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Sedangkan untuk invers dari transformasi Fourier (kebalikannya, dari domain frekuensi ke domain waktu) dapat ditulis dengan rumus:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

CONTOH SOAL:



Misalnya diberikan gambar seperti pada gambar di atas. Gambar di atas menunjukkan isyarat dengan domain waktu (a) dan isyarat dengan domain frekuensi (b).

Kita dapat tentukan : $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt$. Lalu karena $x(t)$ mempunyai $\frac{1}{T_s}$, untuk f tidak sama dengan nol, kita mempunyai rumus:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-T_s}^{T_s} e^{j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{j2\pi f} e^{j2\pi ft} \Big|_{-T_s}^{T_s} = \frac{1}{j2\pi f} \sin(2\pi f T_s) \end{aligned}$$

di mana hasil akhirnya adalah **nilai transformasi Fourier untuk semua nilai f .**

Sedangkan untuk $f = 0$, kita mempunyai rumus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt = \int_{-T_s}^{T_s} e^{j2\pi f t} dt$$

atau dengan menggunakan Aturan L'Hospital :

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{j2\pi f} \sin(2\pi f T_s) = T_s$$

Kesimpulan dari soal di atas adalah: jika nilai T_s besar, maka nilai $1/2T_s$ sangat kecil, sehingga gelombang tersebut mempunyai frekuensi yang kecil. Jika nilai T_s kecil, maka nilai $1/2T_s$ adalah besar, sehingga gelombang tersebut mempunyai frekuensi yang besar. (karena frekuensi adalah berbanding terbalik dengan nilai T atau periode).

3.5 Arti Fisik Transformasi Fourier

Dapat kita lihat pada pembahasan sebelumnya, transformasi Fourier digunakan untuk mengubah dari domain waktu ke domain frekuensi. Untuk setiap frekuensi f , pasti ada respon dari fungsi $X(f)$, dan untuk setiap frekuensi f , pasti ada frekuensi negatif $-f$. Arti dari $X(f)$ dapat kita lihat dari rumus berikut:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt$$

Dari nilai transformasi Fourier untuk semua nilai f pada contoh sebelumnya, kita dapat menentukan:

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f} \sin(2\pi f T_s)$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} X(-f)e^{j2\pi ft} + X(f)e^{-j2\pi ft} \\ = X(f)(e^{-j2\pi ft} + e^{j2\pi ft}) \\ = \frac{2}{\pi f} \sin(\pi f T) \cos(2\pi ft) \end{aligned}$$

Dalam kasus yang lain, kita akan melihat bahwa $X(-f) = -X(f)$:

$$\begin{aligned} X(-f)e^{j2\pi ft} + (-X(f)e^{-j2\pi ft}) \\ = X(f)(e^{-j2\pi ft} - e^{j2\pi ft}) \\ = \frac{2\sin^2(\pi f T)}{j\pi f} 2j \sin(2\pi ft) \\ = \frac{4\sin^2(\pi f T)}{\pi f} \sin(2\pi ft). \end{aligned}$$

Dengan cara yang berbeda, kita menyelesaikan persamaan $X(-f) = X(f)$:

$$\begin{aligned} X(-f)e^{j2\pi ft} + X(f)e^{-j2\pi ft} \\ = e^{j2\pi ft} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{-j2\pi f T} + e^{-j2\pi ft} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{j2\pi f T} \\ = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} (e^{j2\pi f(t-T)} + e^{-j2\pi f(t-T)}) \\ = \frac{\sin(\pi f T) 2 \cos(2\pi f(t-T))}{\pi f} \\ = \frac{2}{\pi f} \sin(\pi f T) \cos(2\pi f(t-T)). \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat diselesaikan secara sederhana dengan mensubstitusi $t = t - T_s$ ke dalam persamaan $\frac{2}{\pi f} \sin(\pi f T) \cos(2\pi f t)$.

Sekarang kita misalkan ~~_____~~, dengan

$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$, atau sering disebut phase shift (derajat fase). Sehingga:

$$\begin{aligned} X(-f)e^{j2\pi ft} + X(f)e^{-j2\pi ft} \\ = re^{-j\theta} e^{-j2\pi ft} + re^{j\theta} e^{j2\pi ft} \\ = re^{-j(2\pi ft + \theta)} + re^{j(2\pi ft + \theta)} \\ = 2r \cos(2\pi ft + \theta) \\ = 2|X(f)| \cos(2\pi ft + \theta). \end{aligned}$$

3.6 Sifat-Sifat Transformasi Fourier

1. Linear.

Dimisalkan $z(t) = ax(t) + by(t)$ sebagai kombinasi dari dua isyarat, yaitu $x(t)$ dan $y(t)$. Transformasi Fourier pada $z(t)$ dapat dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Z(f) &= F\{a x(t) + b y(t)\} \\ &= a F\{x(t)\} + b F\{y(t)\} \\ &= a X(f) + b Y(f) \end{aligned}$$

Invers dari persamaan di atas (fungsi waktu) adalah:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

2. Pergeseran waktu (time shift).

Dimisalkan ~~_____~~ adalah versi pergeseran waktu dari $x(t)$. Di mana t_0 adalah bilangan riil. Transformasi Fourier $z(t)$ dimasukkan ke dalam rumus $x(t)$ adalah sebagai berikut.

$$z(t) = x(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f(t - t_0)} df$$

Variabel $(t - t_0)$ dapat diubah menjadi τ :

$$\begin{aligned}
 Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= e^{-j2\pi f t_0} X(f)
 \end{aligned}$$

Sedangkan inversnya adalah: ~~rumus~~

3. Pergeseran frekuensi (frequency shift).

Dimisalkan f pada persamaan transformasi invers adalah $f - \alpha$, di mana α adalah bilangan riil. Kita mempunyai rumus:

~~$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$~~

lalu dimisalkan $f - \alpha$:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(v) e^{j2\pi(v+\alpha)t} dv \\
 &= e^{j2\pi\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} X(v) e^{j2\pi vt} dv \\
 &= e^{j2\pi\alpha t} x(t)
 \end{aligned}$$

Sehingga, rumus dalam pergeseran frekuensi = ~~rumus~~

Dengan fungsi di atas, sulit untuk menentukan arti fisik dari ~~rumus~~. Kita ingat kembali bahwa $x(t)$ adalah fungsi nyata. Fungsi ~~rumus~~ dapat terdiri dari bagian khayal. Seperti di bawah ini:

~~$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$~~

sehingga: ~~rumus~~

dan:

$$R\omega = \frac{1}{2}(\omega + \omega^*)e^{j\omega t} + \frac{1}{2}(\omega - \omega^*)e^{j\omega t}$$

dalam persamaan di atas, pergeseran frekuensi mencakup dua frekuensi, yaitu ω dan ω^* . Ini diperlukan untuk memperkenalkan modulasi amplitudo yang akan dijelaskan nanti.

Invers dari pergeseran frekuensi tersebut adalah:

4. Konvolusi.

Konvolusi $z(t)$ dari dua isyarat $x(t)$ dan $y(t)$ adalah:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

Konvolusi $x(t)*y(t)$ dapat bersifat komutatif, dan akan bernilai sama dengan $y(t)*x(t)$. Di bawah ini, kita akan mencoba mengubah persamaan di atas menjadi bentuk transformasi Fourier.

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) Y(f) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] Y(f) \\ &= X(f) Y(f) \end{aligned}$$

Sehingga kita mempunyai bentuk :

$$Z(f) = X(f) Y(f)$$

5. Modulasi

Pada modulasi terdiri dari perkalian dua isyarat, salah satunya adalah pengubah isyarat atau pemodulasi isyarat lain. Kita akan menghitung hasil dari $z(t)=x(t)y(t)$ dalam transformasi Fourier. Sebelumnya kita merepresentasikan $x(t)$ dan $y(t)$ sebagai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-u) \delta(u-y) du dx$$

sehingga dihasilkan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-y) dx$$

Dimisalkan $u = x - y$:

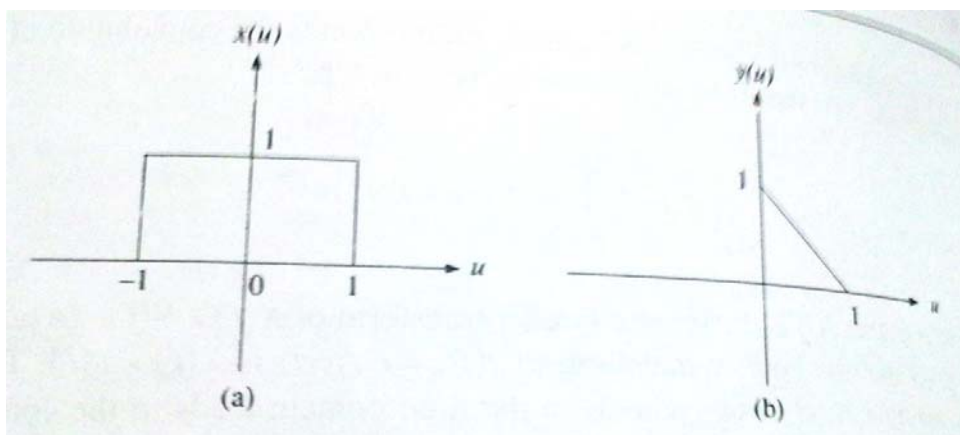
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u+y) \delta(u) du$$

Sehingga hasilnya adalah:

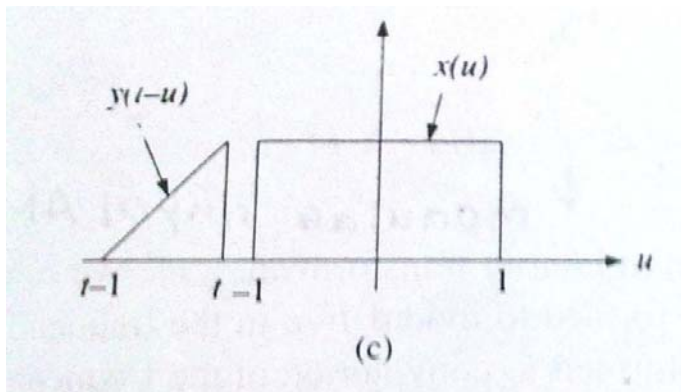
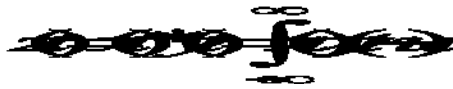
$$f(y)$$

CONTOH SOAL:

Diberikan $x(u)=1$ untuk $-1 \leq u \leq 1$ dan $x(u)=0$ untuk u di manapun. Dan diberikan $y(u)=1-u$ untuk $0 \leq u \leq 1$ dan $y(u)=0$ untuk u di manapun. Fungsi $x(u)$ dan $y(u)$ digambarkan seperti di bawah ini.

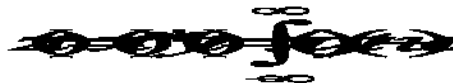


Gambar di bawah ini menunjukkan ~~gambar tersebut~~ untuk nilai t konstan. Sesuai yang tergambar di gambar tersebut, pada $y(t-u)$ dilakukan dua operasi. Pertama, nilai $y(u)$ dibalik. Kedua, nilai $y(u)$ dapat dipindahkan ke ruas sebelah kiri di mana t bernilai negatif atau ke ruas sebelah kanan di mana t bernilai positif. Maka kita dapat menghitung $y(t-u)$ dengan integrasi dari tidak terbatas sampai minus tidak terbatas. Sehingga:

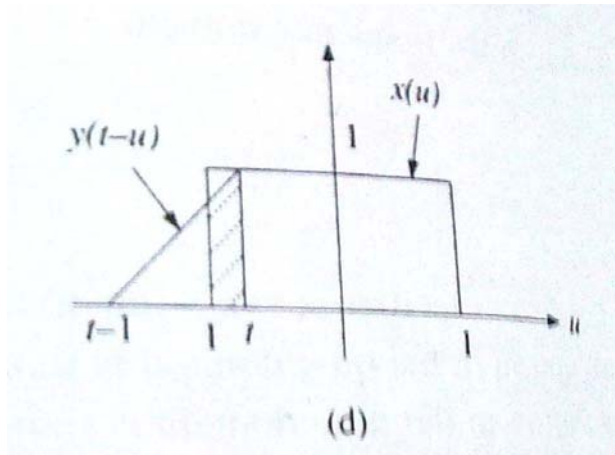


Di sini terdapat beberapa keadaan yang berbeda, yaitu:

- ~~gambar tersebut~~ Dalam keadaan ini, $z(t)$ bernilai 0.
- ~~gambar tersebut~~ Dalam keadaan ini, $x(u)=1$ saling berpotongan dengan $y(t-u)$ sehingga:



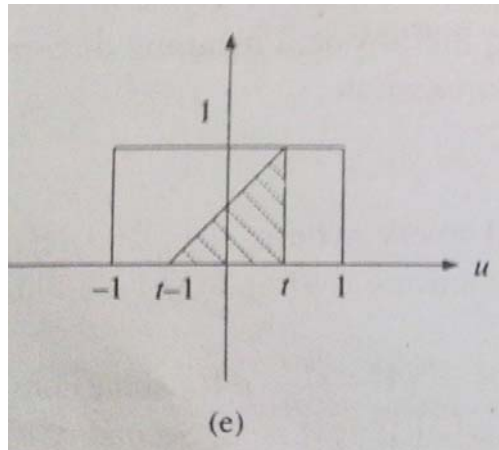
Persamaan di atas mempunyai nilai yang menunjuk ke perpotongan $x(u)$ dengan $y(t-u)$ untuk nilai t tertentu yang ditunjukkan oleh gambar di bawah ini



Dalam daerah ini, kita dapat mengintegrasikan dari $u=-1$ sampai dengan $u=t$:

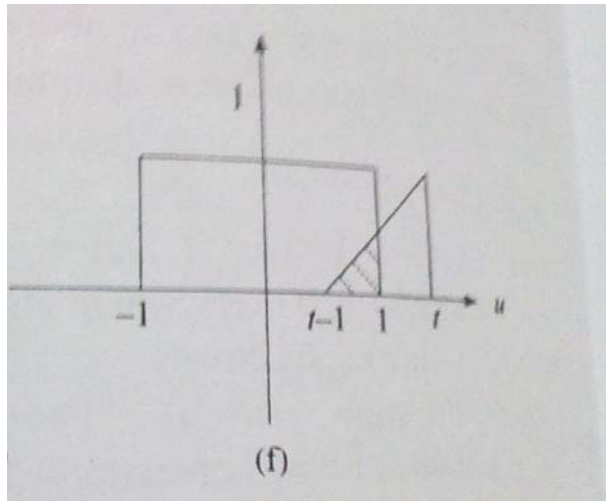
$$\begin{aligned}
 z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-1}^t 1(1-(t-u))du \\
 &= (1-t)u + \frac{1}{2}u^2 \Big|_{-1}^t \\
 &= (1-t)t + \frac{1}{2}t^2 - (1-t)(-1) - \frac{1}{2}(-1)^2 \\
 &= t - t^2 + \frac{1}{2}t^2 + 1 - t + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}(t - t^2)
 \end{aligned}$$

- c. ~~Sehingga nilai z(t)=1/2.~~ Karena $y(t-u)$ terbentang pada $t=0$ sampai dengan $t=1$, maka bagian ini berpotongan dengan $x(u)$ dan nilai $y(t-u)$ tetap sama. Sesuai dengan gambar di bawah ini, saat $t=0$, ~~Sehingga nilai z(t)=1/2.~~



- d. ~~...~~ Pada keadaan ini, sesuai dengan gambar di bawah, kita mengintegrasikan dari $u=t-1$ sampai dengan nilai $u=1$.

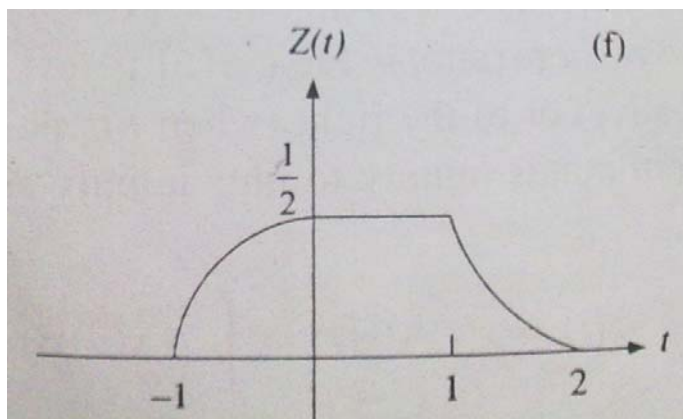
$$\begin{aligned}
 z(t) &= \int_{t-1}^1 x(u)y(t-u)du \\
 &= \int_{t-1}^1 (1-t+u)du \\
 &= u - tu + \frac{1}{2}t^2 \Big|_{t-1}^1 \\
 &= (1-t + \frac{1}{2}) - ((t-1) - t(t-1) + \frac{1}{2}(t-1)^2) \\
 &= \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2 \\
 &= \frac{1}{2}(t-2)^2
 \end{aligned}$$



e. ~~Sebelumnya~~ Dalam keadaan ini, nilai $z(t)=0$.

Hasil akhir untuk $z(t)=x(t)*y(t)$ dapat dilihat pada gambar di bawah ini. Tampak pada konvolusi dilakukan efek penghalusan pada gambar. Nilai $x(u)$ mempunyai sudut tajam, sekarang tidak ada lagi dan diganti dengan sudut yang lebih tumpul.

Perubahan tampak pada lebar $x(u)$ yang sebelumnya 2, sekarang menjadi 3. dan tinggi $x(u)$ direduksi dari 1 menjadi $\frac{1}{2}$. Hal ini akan lebih jelas jika kita telah membicarakan tentang spread spectrum.



3.7 Representasi Transformasi Fourier dalam Isyarat Periodis

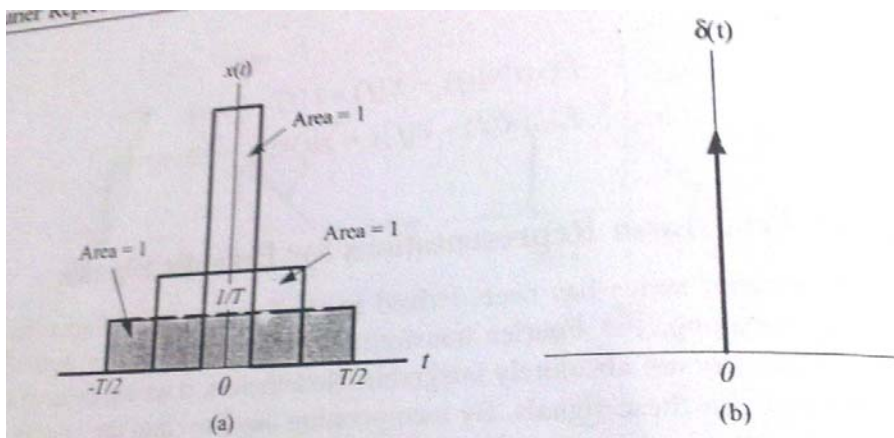
Transformasi Fourier dalam penggunaannya dalam isyarat periodis dengan cara menggabungkan impuls ke dalam transformasi Fourier dengan cara yang benar. Lebih dahulu kita mendefinisikan fungsi impuls terlebih dahulu. Unit impuls ditandai dengan simbol $\delta(t)$ dengan relasi sebagai berikut.

$$\delta(t) = 0 \text{ for } t \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Sifat-sifat penting dari unit impuls adalah “sifting property” atau pengayaan properti. Sifat-sifat ini menggabungkan dua persamaan di atas menjadi satu persamaan sederhana:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

Gambar di bawah ini menunjukkan membatasi form dari bentuk persegi panjang menjadi bentuk impuls.



CONTOH PERSAMAAN

Dalam contoh ini, dimisalkan kita akan memastikan transformasi Fourier dari unit impuls isyarat $\delta(t)$. Dengan menggunakan sifting property, dapat kita tulis:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \delta(t - \tau) d\tau$$

persamaan tersebut berarti berisi tentang pasangan transformasi Fourier:

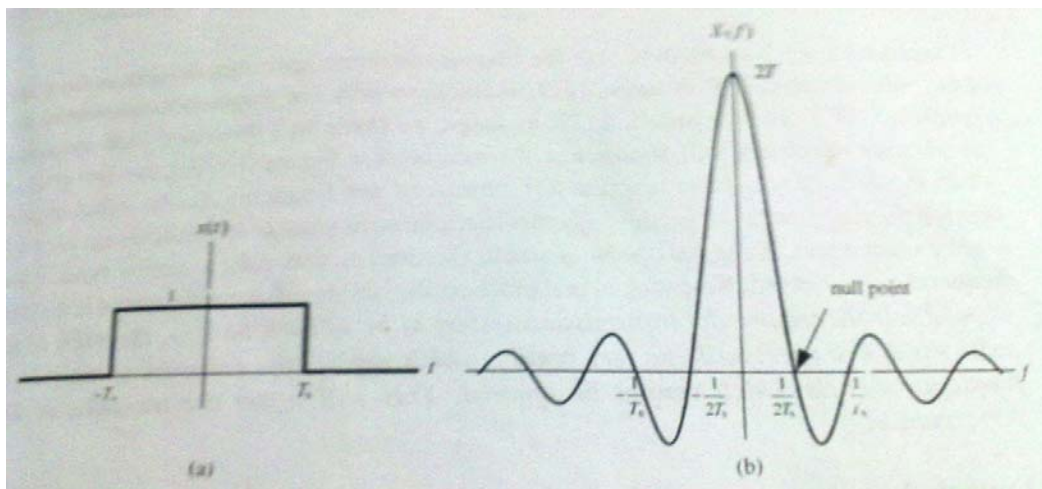
$$1 \leftrightarrow \delta(f)$$

Kita juga akan menghitung invers transformasinya, yaitu:

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df$$

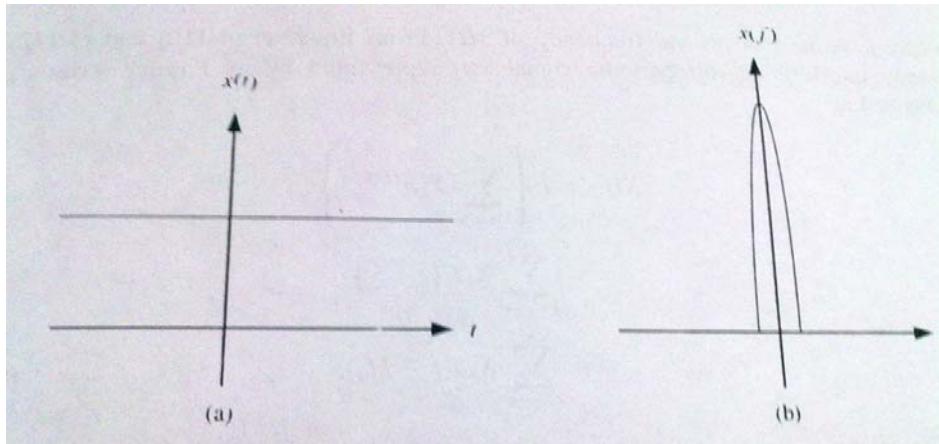
Persamaan tersebut akan menghasilkan: $\delta(t)$

Sekarang, kita akan mencari tahu apa yang dimaksud dari $\delta(t)$. Ini dapat menjelaskan dengan melihat gambar di bawah ini.



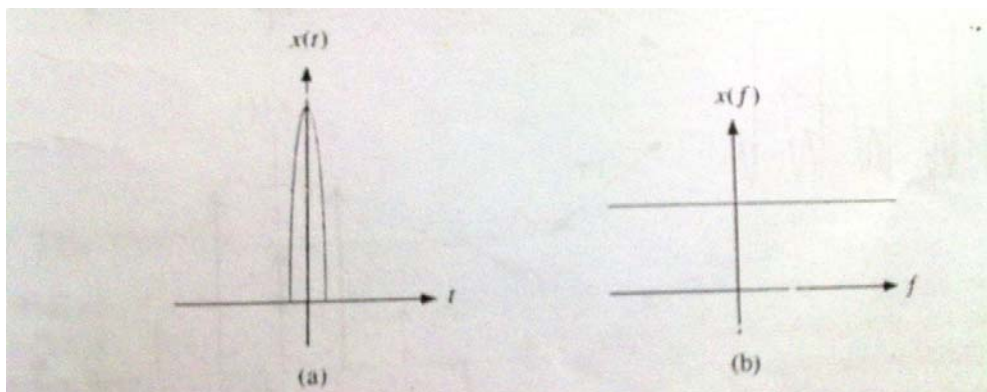
Kita mempertimbangkan dari dua keadaan:

- **$T_s \rightarrow \infty$** . Dalam keadaan ini, fungsi akan berada dalam keadaan konstan, seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



Dalam pengertian teknik elektro, ini adalah arus DC (direct current) dengan frekuensi 0. Dalam keadaan ini, $x(t)=1$. Dalam spread spectrumnya, transformasi Fourier ini menjadi sangat sempit dengan "null point" $1/2T$. Sehingga dapat disimpulkan transformasi Fourier dari $x(t)=1$ adalah $\delta(f)$. Ini membuktikan bahwa persamaan $\delta(f) = T$ adalah benar.

- ~~T~~ Dalam fungsi ini, fungsi akan sangat sempit sesuai dengan gambar di bawah. Ini membuktikan bahwa ~~$\delta(f) = T$~~ . Ini sesuai dengan transformasi Fourier, null point $1/2T$ akan menjadi tidak terbatas.



3.8 Transformasi Fourier Diskret

Katakan kita diberikan sebuah waveform $x(t)$ (contohnya sebuah suara manusia). Karena kita tidak mungkin mengetahui fungsi matematis dari $x(t)$, maka tidaklah mungkin bagi kita untuk mengkalkulasikan transformasi Fourier $X(f)$. Oleh karena itu, kita tidak dapat melakukan Fourier Transform terhadap fungsi tersebut.

Kita tidak dapat melakukan :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Yang dapat kita lakukan adalah melakukan membagi seluruh periode waktu dari $x(t)$ menjadi $n = 2^p$ dimana p merupakan sebuah integer. Setelah itu kita dapat men-*sample* fungsi $x(t)$ dengan interval *sampling* $T_s = T/n$. Rumus $x(t) = \cos(2\pi t)$ tidak perlu kita gunakan, kita dapat memanfaatkan fungsi $x(kT_s) = \cos(2\pi kT_s)$.

Namun karena kita tidak dapat melakukan perhitungan tersebut secara analitis, maka kita harus melakukan prakiraan/estimasi terhadap solusi yang ingin kita dapatkan. Dan prakiraan tersebut jika dijabarkan akan mirip hasilnya dengan $X(i)$ pada Transformasi Fourier. Oleh karena itu kita dapat mendefinisikan bahwa:

$$A_i = X(i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{-\frac{j2\pi i k}{n}}$$

Untuk $0 \leq i \leq n-1$

Dengan pemanfaatan rumus tersebut dapat dianalisa hal-hal sebagai berikut:

1. Terdapat sebuah frekuensi mendasar f_0 yang nilainya sama dengan $f_0 = 1/T$
2. A_i untuk $i = 0, 1, \dots, (n/2) - 1$. Pada rumus di atas jika a_k merupakan bilangan real, maka dengan mudah dapat dibuktikan bahwa A_0 dan $A_{n/2}$ merupakan bilangan real juga. Perlu dipahami bahwa di dalam Transformasi Fourier Diskret, jika a_k merupakan bilangan real, maka frekuensi dari $i = (n/2) + 1$ sampai dengan $i = n - 1$ tidak memiliki arti fisik. Mereka ada agar fungsi cosinus dapat dihasilkan.
3. Secara Umum A_i merupakan sebuah bilangan kompleks. Kekuatan dari A_i , yang dinotasikan dengan $[A_i]$ menjelaskan kekuatan dari sebuah fungsi cosinus yang terdapat di dalam $x(t)$ dengan frekuensi if_0 .
4. Terdapat sebuah sifat yang sangat penting untuk ditinjau yaitu Invers Transformasi Fourier Diskret yang didefinisikan dibawah ini:

$$a_t = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A_k e^{j \frac{2\pi t k}{n}}$$

Untuk $0 \leq k \leq n-1$

Perlu dipahami bahwa kita tidak dapat merekonstruksi keseluruhan $x(t)$. Namun kita dapat merekonstruksi titik-titik n dari $x(t)$, -yaitu a_k dimana $k = 0, 1, \dots, n-1$. Semakin besar n , maka semakin akurat proses rekonstruksinya.

5. Perlu diperhatikan bahwa $n = 2^p$, dimana $p = \text{integer}$.

Selain itu juga terdapat sebuah metode untuk melakukan Transformasi Fourier Diskret cepat. Hal itu dapat dilakukan dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:

Input: $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, n = 2^p$

Output:

$$A_t = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{-j \frac{2\pi t k}{n}}$$

Untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Langkah 1: Jika $n = 2$

$$A_0 = a_0 + a_1$$

$$A_1 = a_0 - a_1$$

Langkah 2: Cari koefisien dari transformasi Fourier diskret dari $a_0, a_2, \dots, a_{n-2}(a_1, a_3, \dots, a_{n-1})$. Koefisien dapat dituliskan sebagai $B_0, B_1, \dots, B_{n/2}(C_0, C_1, \dots, C_{n/2})$

Langkah 3: Untuk $i = 0$ sampai $i = n/2 - 1$

$$A_t = B_t + W_N^t C_t$$

$$A_{t+n/2} = B_t + W_N^{(t+\frac{n}{2})} C_t$$

3.9 Invers Transformasi Fourier Diskret

Invers transformasi Fourier diskret akan mentransformasikan A_i kembali menjadi a_i melalui persamaan sebagai berikut:

$$a_t = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A_k e^{\frac{j2\pi tk}{n}}$$

Invers transformasi Fourier diskret singkat/cepat dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

Input: $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, n = 2^p$

Output:

$$a_t = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A_k e^{\frac{j2\pi tk}{n}}$$

Untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Langkah 1: Jika $n = 2$

$$a_0 = \frac{1}{2} (A_0 + A_1)$$

$$a_1 = \frac{1}{2} (A_0 - A_1)$$

Langkah 2: Cari koefisien dari invers transformasi Fourier diskret dari $A_0, A_2, \dots, A_{n-2} (A_1, A_3, \dots, A_{n-1})$. Koefisien dapat dituliskan sebagai $B_0, B_1, \dots, B_{n/2-1} (C_0, C_1, \dots, C_{n/2-1})$

Langkah 3: Untuk $i = 0$ sampai $i = n/2 - 1$

$$a_t = \frac{1}{n} (B_t + W_n^{-t} C_t)$$

$$a_{t+n/2} = \frac{1}{n} (B_t + W_n^{-(t+\frac{n}{2})} C_t)$$

3.10 Pengertian Fisik Mengenai Transformasi Fourier Diskret

Pada bagian-bagian sebelumnya telah dibahas dengan amat sangat mendetil mengenai unsur-unsur matematis dari Transformasi Fourier Diskret. Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai definisi ini secara lebih nyata, sehingga lebih mudah untuk dipahami.

Yang ingin kita ketahui adalah solusi dari persamaan ini:

$$x(k) = x(kT_s) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A_t e^{j \frac{2\pi t k}{n}}$$

untuk $k = 0, 1, \dots, n-1$

mengingat bahwa:

$$e^{j \frac{2\pi t k}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi t}{n} k\right) + j \sin\left(\frac{2\pi t}{n} k\right)$$

Dari kedua persamaan di atas dapat diketahui:

$$A_t = a_0 + a_1 w_n^t + a_2 w_n^{2t} + \dots + a_n^{(n-1)t}$$

$$A_{n-t} = a_0 + a_1 w_n^{n-t} + a_2 w_n^{2(n-t)} + \dots + a_n^{(n-1)(n-t)}$$

Sehingga:

$$= a_0 + a_1 w_n^{-t} + a_2 w_n^{-2t} + \dots + a_n^{-(n-1)t}$$

Karena:

$$w_n^f = e^{j \frac{2\pi f}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi f}{n}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi f}{n}\right), w_n^{-t} = e^{-j \frac{2\pi t}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi t}{n}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi t}{n}\right)$$

Sehingga dapat dipahami bahwa Transformasi Fourier Diskret berisikan sebuah deretan fungsi cosinus dengan kemungkinan terjadinya pergeseran fase. Oleh karena itu, transformasi Fourier dari fungsi apapun dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$x(k) = \frac{1}{n} \left(A_0 + A_{\frac{n}{2}} e^{j\pi k} + 2 \sum_{t=1}^{\frac{n}{2}-1} |A_t| \cos\left(\frac{2\pi t k}{n} + \theta_t\right) \right)$$

Untuk $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Dapat diketahui bahwa dengan memanfaatkan Transformasi Fourier Diskret, kita dapat memperkirakan sebuah fungsi $x(t)$ sebagai sebuah superposisi dari fungsi cosinus. Berikut adalah penjabaran mengenai analisa Transformasi Fourier Diskret:

Dapat dipahami bahwa tugas dari Transformasi Fourier Diskret adalah untuk menentukan A_k dari a_i dimana $a_k = x(k) = x(kT_s)$ untuk $i = 0, 1, \dots, n-1$. Sehingga dapat dikatakan bahwa Transformasi Fourier Diskret merupakan sebuah perangkat untuk menganalisis (analysis tool). Transformasi Fourier Diskret

mentranformasikan $x(t)$ dari domain waktu menjadi domain frekuensi dan membuat kita dapat menentukan frekuensi-frekuensi yang terdapat di $x(t)$.

Fungsi dari Invers transformasi Fourier diskret adalah untuk menentukan a_i dari A_i . Sehingga dapat dikatakan secara tidak langsung bahwa Invers transformasi Fourier diskret merupakan sebuah perangkat untuk merekonstruksi (reconstruction tool). Invers transformasi Fourier diskret merubah $x(t)$ dari domain frekuensi menjadi domain waktu dan mengembalikan fungsi aslinya.

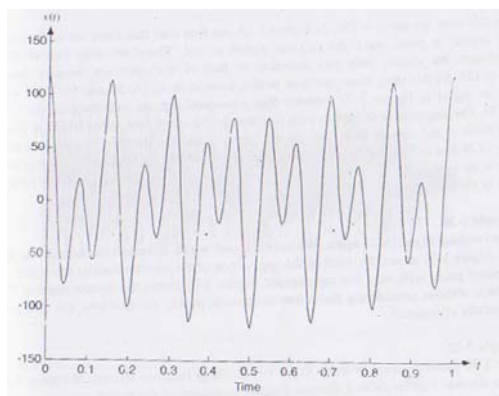
Namun rekonstruksi tidaklah sempurna. Semakin besar n yang digunakan pada proses rekonstruksi maka semakin akurat $x(t)$.

Karena tidaklah mudah untuk memanfaatkan n yang begitu besar, maka kita dapat menggunakan metode interpolasi untuk merekonstruksi $x(t)$.

Pada A_i , untuk $i = 0$ sampai dengan $n-1$, kita hanya perlu memperhatikan terhadap A_0 , $A_{n/2}$ dan A_i untuk $i = 1$ sampai dengan $(n/2) - 1$

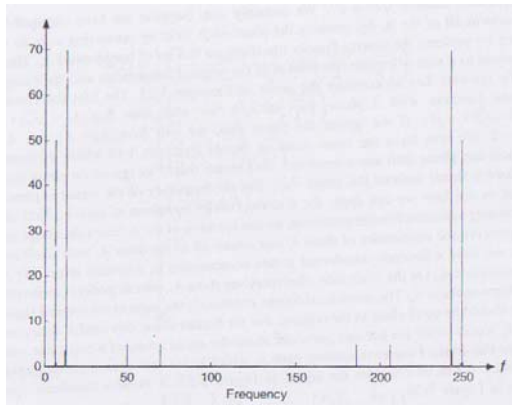
A_i dan A_{n-1} berkontribusi ke dalam magnitud dan pergeseran fase dari $\cos(2\pi i k/n)$

Untuk kasus selanjutnya, kita dapat menganalisa bagaimana pengaplikasian Transformasi Diskret Fourier terhadap isyarat. Gambar 3-27 di bawah ini merupakan sebuah gambar isyarat yang terdapat noise di dalamnya.



Gambar 3-27 – isyarat dengan noise

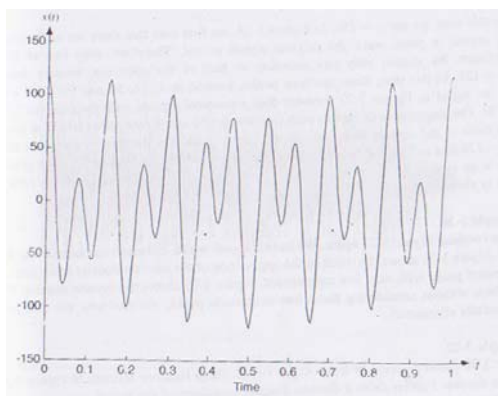
Gambar dibawah ini adalah sebuah spectrum Transformasi Fourier.



Gambar 3-28 – Transformasi Fourier Diskret terhadap isyarat pada gambar 3-27

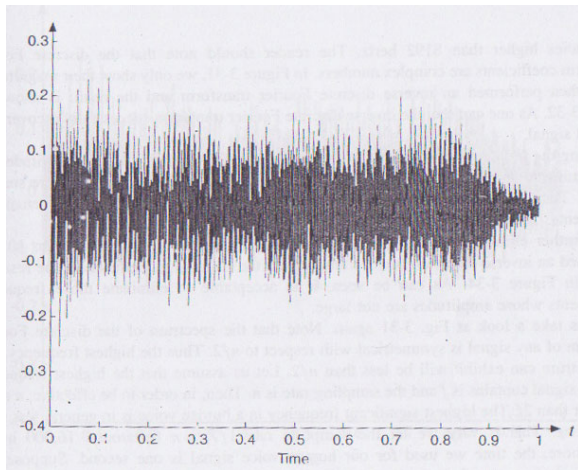
Pada kasus ini kita membuat $n = 256$. Di gambar 3-28 hanya terdapat 8 *peaks*. Namun mereka selalu berpasangan, karena isyarat aslinya nyata. Oleh karena itu, hanya dua yang signifikan. Sehingga kita hanya perlu untuk memperhatikan satu sisi dari spectrum tersebut yaitu $n/2 = 128$. Terdapat 4 *peaks*, masing-masing terjadi pada 7, 13, 50, dan 70. Ini berarti bahwa gambar 3-27 memiliki 4 isyarat sinusoidal dengan frekuensi 7, 13, 50, dan 70. Selanjutnya bagian $n/2 = 128$ sampai dengan $n = 256$ adalah simetris dengan bagian yang baru saja telah dijelaskan.

Jika kita perhatikan gambar 3-27 kembali, kita memiliki sebuah isyarat yang terdapat noise-nya. Gambar 3-28 menunjukkan hasil dari pengaplikasian Transformasi Fourier Diskret. Sementara gambar 3-29 dibawah ini menunjukkan invers dari Transformasi Fourier Diskret, dapat dilihat bahwa noisenya telah dieliminasi.

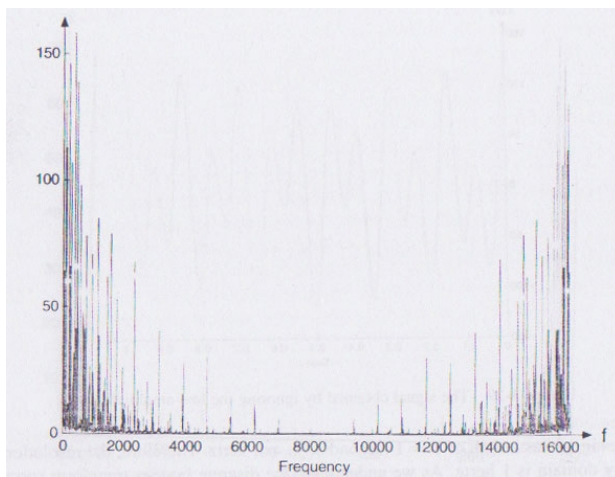


Gambar 3-29 – Isyarat tanpa memperhatikan low amplitude peaks

Gambar 3-30 di bawah ini menunjukkan sebuah periode dari isyarat musik dalam satu detik. Di gambar selanjutnya, yaitu 3-31 dapat dilihat sebuah Transformasi Fourier Diskret dari isyarat musik tersebut. Pada analisa ini, n dibuat $2^{14} = 16,384$. Sehingga interval sampling adalah $T_s = 1/16384$ (detik). Interval sampling pada domain frekuensi adalah $f_0 = 1/T$. Mengingat isyarat memiliki panjang $T = 1$ detik, $f_0 = 1$ Hz, maka resolusi dari domain frekuensi adalah 1 Hz. Seperti yang telah kita pahami bahwa spektrum Transformasi Fourier diskret simetris dengan $n/2$ maka hanya frekuensi yang berada dibawah 8192 Hz yang akan tampak.

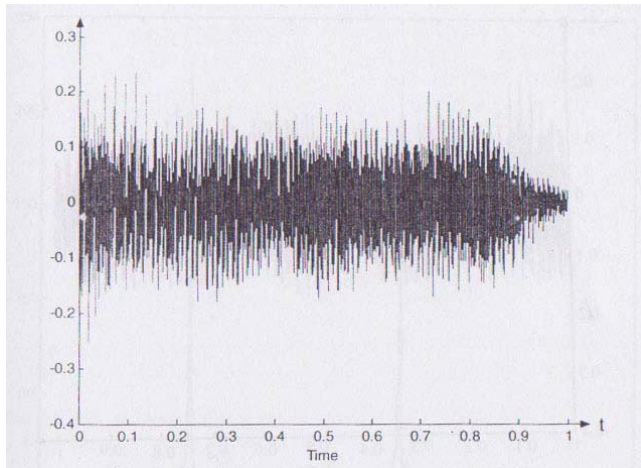


Gambar 3-30 – Isyarat Musik selama 1 detik



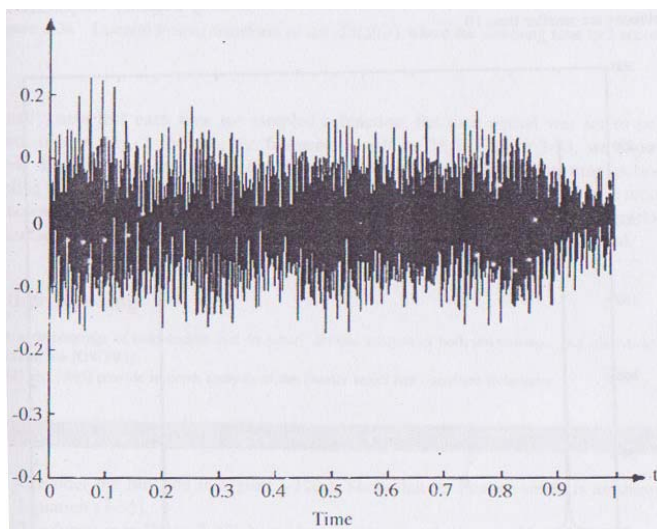
Gambar 3-31 – Spektrum Transformasi Fourier Discrete pada isyarat musik

Selain itu kita juga dapat melakukan invers Transformasi Fourier Diskret yang akan menghasilkan isyarat aslinya seperti pada gambar 3-32 dibawah:

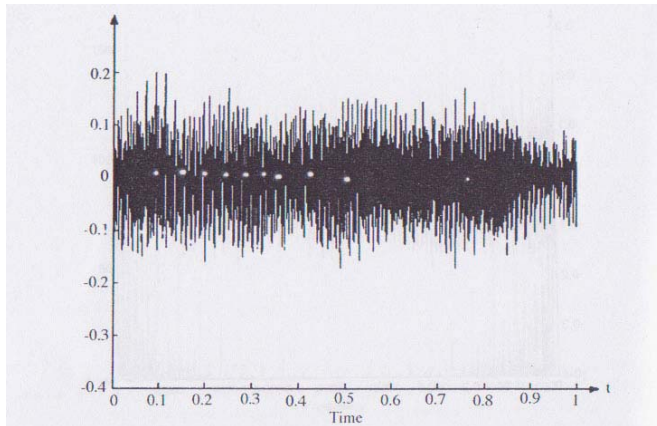


Gambar 3-32 – Hasil dari Invers Transformasi Fourier Diskret

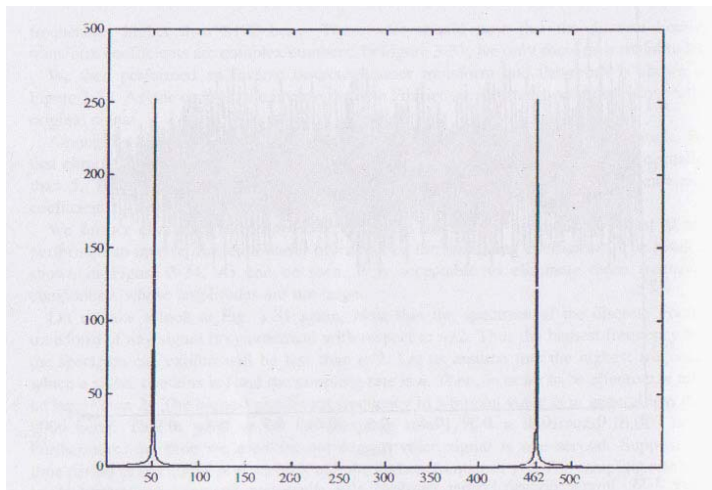
Gambar-gambar selanjutnya yang terdapat dibawah ini merupakan berbagai macam transformasi yang dapat dilakukan terhadap isyarat musik tersebut:



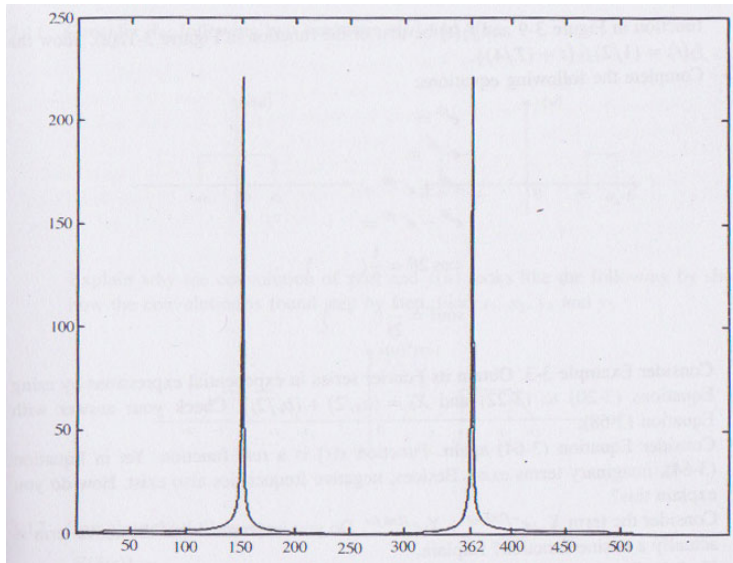
Gambar 3-33 – Invers Transformasi Fourier Diskret dengan mengeliminasi komponen frekuensi yang beramplitudo lebih rendah dari 5



Gambar 3-34 – Invers Transformasi Fourier Diskret dengan mengeliminasi komponen frekuensi yang beramplitudo lebih rendah dari 10



Gambar 3-35 – Transformasi Fourier Diskret dengan $\cos\{2\pi(50)t\}$ dengan waktu sampling 1 detik



Gambar 3-36 - Transformasi Fourier Diskret dengan $\cos\{2\pi(50)t\}$ dengan waktu sampling 3 detik