Deret dan Transformasi Fourier

Risanuri Hidayat,
Jurusan Teknik Elektro dan Teknologi Informasi, FT UGM,
Negeri Ngayogyakarta Hadiningrat 55281, INDONESIA
risanuri@te.ugm.ac.id (risanuri@gmail.com)

Dalam tulisan ini akan dijelaskan domain frekuensi untuk isyarat periodis dan non-periodis yang mempunyai penyelesaian secara analitik, khususnya Transformasi Fourier.

1.1 Deret Fourier

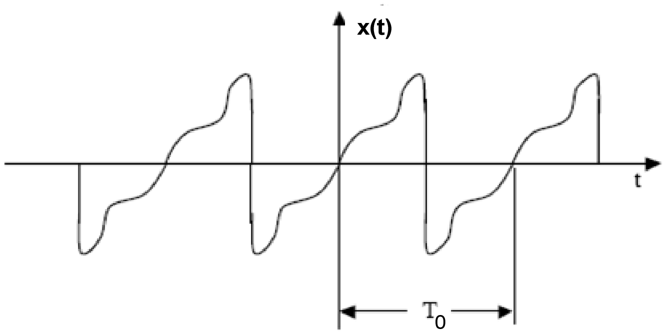
1.1.1 Deret Fourier untuk isyarat Periodis kontinyu

Sebuahisyaratperiodispastiakanmempunyaipersamaan,

$$y(t) = y(t + nT), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (1)$$

Untuksemua t (waktu).T adalahperiodewaktuketikafungsimulaiterulang.

Setiapfungsi yang periodis ternyata dapat dinyatakan dengan superposisi fungsi sinus dan kosinus. Telah diketahui bahwa sin ωt fungsi trigonometri dan co sωt yang periodic dengan periode T = 1 / f = 2π / ω, dengan f adalah frekuensi dalam siklus per detik (Hz) dan ω adalah frekuensi sudut dalam radian / det. Gambar 1 menunjukkan fungsi periodis, dengan $T_0 = 2\Pi/ \omega_0$: periode fundamental. ω_0 = frekuensi fundamental



Gambar 1.Contoh isyarat periodis

Suatu isyarat periodis dengan periode T_0 dapat dinyatakan sebagai jumlahan isyarat-isyarat cosines dan/atau sinus dengan periode-periode kelipatan dari T_0

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{.......... (2)}$$

Dengan a_k adalah koefisien atau komponen ke-k, dan k= 0,±1,±2, ... Untuk $k=0$ maka $a_k$disebut komponen dc. Untuk$k=\pm 1$maka a_k disebut komponen fundamental. Dan untuk $k=\pm 2, \pm 3,$..maka a_k disebut komponen harmonik ke –k.

Ketika k=0 dikeluarkan dari sigma, dan k hanya dituliskan dari +1→∞, maka persamaan menjadi

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=+1}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \qquad \text{.......... (3)}$$

Jika a^* adalah conjugate kompleks dari a, kemudian ganti k dengan $-k$, maka dari persamaan di atas akan didapatkan bahwa $a^*_{-k}=a_k$ atau $a^*_k=a_{-k}$. Sehingga persamaan menjadi

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \qquad \text{.......... (4)}$$

Penjumlahan konjugate kompleks dari persamaan di atas menghasilkan

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{Re}\left\{a_k e^{jk\omega_0 t}\right\} \qquad \text{.......... (5)}$$

Jika $a_k = A_k\, e^{j\theta k}$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{Re}\left\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k}\right\} \qquad \text{.......... (6)}$$

Diketahui bahwa jika ada bilangan kompleks z=x+iy, maka Re{z} adalah bagian real dari z, yaitu x. Persamaan menjadi

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k Cos(k\omega_0 t + \theta_k) \qquad \text{..........(7)}$$

Dan jika$a_k$dinyatakandengan$a_k= B_k + j\, C_k,$makadapatdibuktikanbahwa

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left[B_k Cos(k\omega_0 t) - C_k Sin(k\omega_0 t)\right] \quad \text{...(8)}$$

1.1.2 Koefisien Fourier a_k

Anggap bahwa sinyal periodis yang diberikan dapat diwakili dengan persamaan (2), maka akan dijelaskan bagaimana menentukan koefisien a_k. Kalikan kedua sisi (2) dengan $e^{-jn\omega_0 t}$, akan diperoleh

$$x(t).e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.e^{-jn\omega_0 t} \quad \text{...(9)}$$

Integralkan kedua sisi dari 0 ke $T_0 = 2\pi/\omega_0$, sehingga

$$\int_0^{T_0} x(t).e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_0^{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.e^{-jn\omega_0 t}dt \quad \text{...(10)}$$

T_0 adalah periode fundamentaldari fungsi x(t)), dan integral kemudian dihitung selama satu periode ini. Integrasi dan penjumlahan dari persamaan di atas menghasilkan,

$$\int_0^{T_0} x(t).e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\left[\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right] \quad \text{...(11)}$$

Lihat integral di dalam kurung []. Untuk k≠n, kedua integral di sisikananadalah nol. Untuk k= n, nilai e^0 di sisikirisamadengan l, sehingganilai integralnya adalah T_0. Secararingkaskemudiankitamendapatibahwa

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{bmatrix} T_0, k = n \\ 0, k \neq n \end{bmatrix} \quad \text{...(12)}$$

Persamaan di atas hanya akan mempunyai nilai ketika k=n. Integralsepanjang interval T_0 menghasilkan ekspresi

$$\int_0^{T_0} x(t).e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left[\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}dt \right]$$

$$\int_0^{T_0} x(t).e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n.T_0 \qquad \text{...(13)}$$

Koefisien Fourier a_k dapat dengan mudah didefinisikan sebagai berikut,

$$a_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t).e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad \text{..(14)}$$

Ringkasnya, jika x (t) adalah sebuah fungsi dengan serangkaian representasi Fourier, [yaitudapatdinyatakansebagaikombinasi linear darieksponensialkompleksharmonic], maka koefisien diberikan oleh persamaan di atas ini. Pasangan persamaan dapat ditulis ulang di bawah ini,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k.e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t).e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad \text{...(15)}$$

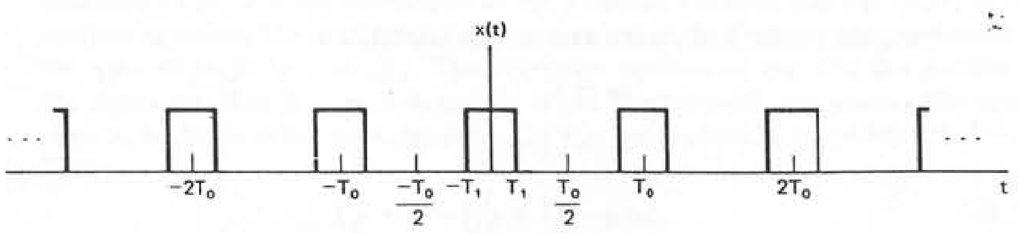
Koefisien a_k disebut koefisien deret Fourier atau koefisien spektral

Komponen dc = $a_0$terjadi ketika k = 0:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt \qquad \text{..(16)}$$

Contoh 1:

Isyarat kotak yang periodis terlihat seperti pada Gambar 2 berikut. Tentukan koefisien Fourier-nya.



Gambar 2.

Isyarat iniperiodisdenganperiode fundamental T_0, sehingga frekuensidasarnya adalah $\omega_0 = 2\pi f_0$ dan $f_0 = 1/T_0$. Persamaan (1) dipakai untukmenghitungkoefisienderet Fourier dari fungsi x (t). Interval yang dipakai adalah (- T_0/ 2< t <T_0). Dengan batas-batasintegrasitersebut danmenerapkan pada () maka untuk k = 0 didapatkan,

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T1}^{+T1} dt = \frac{2T_1}{T_0}$$

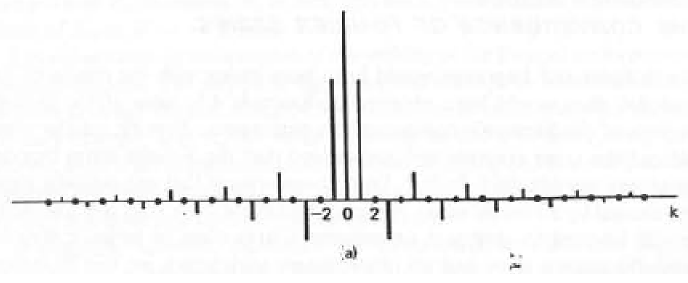
Sepertidisebutkansebelumnya, $a_0$adalah nilai rata-rata x(t). Untuk k≠0 didapatkan,

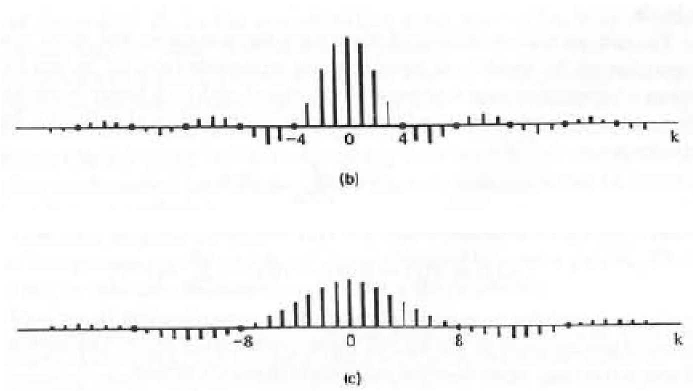
$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T1}^{+T1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T1}^{+T1}$$

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T_0}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right]$$

$$a_k = \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_0} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$$

$$k \neq 0, \omega_0 T_0 = \pi$$





Gambar 3. Koefisien deret Fourier untuk isyarat kotak periodis dengan (a) T_0=4T_1, (b) T_0=8T_1, (c) T_0=16T_1

.

1.1.3 Deret Fourier untuk isyarat Periodis diskret

Sebuahisyaratperiodisdiskret niscaya memenuhipersamaan,

$$x[n] = x[n+N]. \qquad \text{.......(16)}$$

Periode fundamental adalah nilai N, dan ω_0= $2\Pi/N$adalah fundamental frekuensi.Sebagaimana deret Fourier untuk isyarat kontinyu, deret untuk isyarat diskret ini mempunyai bentuk yang sama sebagai berikut,

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k . e^{jk\omega_0 n}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k . e^{jk(2\pi k(2\pi} \qquad \text{.......(17)}$$

Persamaan ini dinyatakan sebagai deret Fourier untuk isyarat (waktu) diskret dan a_k adalah koefisien deret Fourier.

1.1.4 Koefisien Fourier a_k untuk isyarat diskret

Sebagaimana pada isyarat kontinyu, untuk menentukan koefisien a_k,kalikan kedua sisi dengan $e^{-jr\omega_0 n}$, akan diperoleh

$$x[n].e^{-jr\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}.e^{-jr\omega_0 n}$$ ....(18)

Integralkan kedua sisi dari 0 ke N , dan $\omega_0 = 2\pi/N$, sehingga

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n].e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}.e^{-jr(2\pi/N)n}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n].e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n].e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$ ....(19)

Lihat sigma untuk $\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$. Untuk k≠r, nilainya adalah nol. Untuk k= n, nilai e^0 sama dengan l, sehingga nilai sigma adalah N. Secara ringkas kemudian kita mendapati bahwa

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{bmatrix} N, k = r \\ 0, k \neq r \end{bmatrix}$$ ....(20)

Sigma sepanjang interval N menghasilkan ekspresi

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n].e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_{k=r} N$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n].e^{-jr(2\pi/N)n} = a_r N$$ ....(21)

Sehingga a_k dapat dinyatakan sebagai,

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n].e^{-jkn(2\pi/N)}$$
....(22)

Pasangan persamaan dapat ditulis ulang di bawah ini,

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k.e^{jkn(2\pi/N)}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n].e^{-jkn(2\pi/N)}$$
....(23)

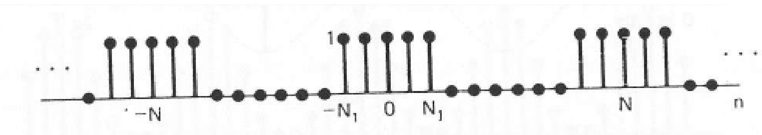
Koefisien a_k disebut koefisien deret Fourier atau koefisien spektral

Komponen dc = $a_0$terjadi ketika k = 0:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]$$
....(24)

Contoh 2.

Isyarat kotak diskret periodis terlihat seperti pada Gambar 3 berikut. Tentukan koefisien Fourier-nya.



Gambar 3. Isyarat kotak diskret periodis

Komponen dc = $a_0$adalah:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=-N1}^{+N1} x[n] = \frac{2N_1 + 1}{N}$$

Koefisien Fourier secara umum adalah,

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N1}^{N1} e^{-jkn(2\pi/N)}$$

Persamaan di atas dapat diuraikan menjadi

$$a_k = a_0 + \frac{1}{N}\left[\sum_{n=1}^{N1} e^{-jkn(2\pi/N)} + \sum_{n=-1}^{-N1} e^{-jkn(2\pi/N)}\right]$$

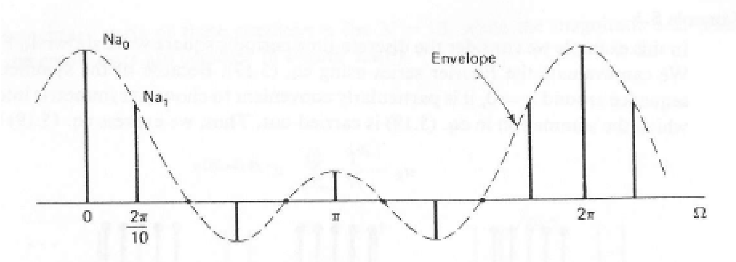
$$a_k = a_0 + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N1}\left[e^{+jkn(2\pi/N)} + e^{-jkn(2\pi/N)}\right]$$

$$\cos(\alpha) = \left[\frac{e^{+j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}\right]$$

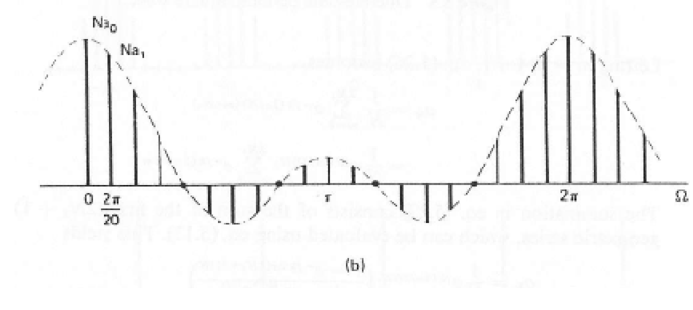
$$a_k = a_0 + \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N1}\left[\frac{e^{+jkn(2\pi/N)} + e^{-jkn(2\pi/N)}}{2}\right]$$

$$a_k = a_0 + \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N1}\cos(kn2\pi/N)$$

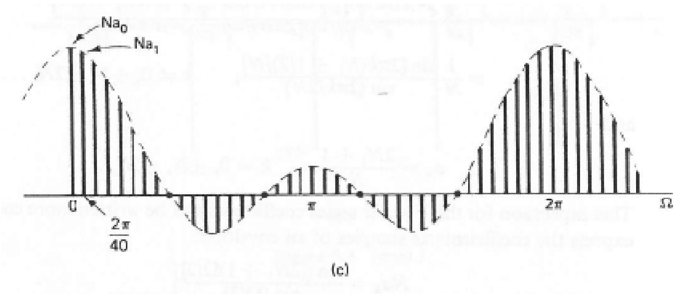
$$Na_k = (2N_1 + 1) + 2.\sum_{n=1}^{N1}\cos(kn2\pi/N)$$



(a)



(b)



Gambar 5. Koefisien Deret Fourier untuk isyarat kotak diskret dengan ($2N_1$+1)=5, dan (a) N=10, (b) N=20, dan (c) N=40.

1.2 Transformasi Fourier

1.2.1 Transformasi Fourier untuk isyarat kontinyu

Sebagaimana pada uraian tentang Deret Fourier, fungsi periodis yang memenuhi persamaan (1) dapat dinyatakan dengan superposisi fungsi sinus dan kosinus. Deret Fourier sebuah fungsi periodis dinyatakan sebagai,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k . e^{jk\omega_0 t} \quad \text{.......(25)}$$

Dengan$T_0 = 2\Pi/\omega_0$: periode fundamental. ω_0 : frekuensi sudut fundamental, $f_0 = 1/T_0$. Sedangkan koefisien deret Fourier dinyatakan dengan persamaan,

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t).e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{.......(26)}$$

atau

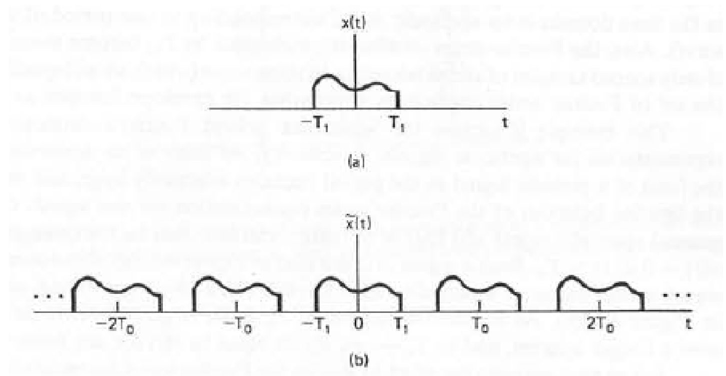
$$T_0 a_k = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t).e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{.......(27)}$$

Ketika T_0 bertambah besar, yang berarti ω_0 mengecil, maka jarak antar koefisien Fourier menjadi semakin kecil juga (merapat). Gambar 5 memperlihatkan bahwa jarak antar koefisien Fourier semakin rapat. Ketika T_0 bernilai sangat besar, maka koefisien Fourier sangat rapat dan menjadi fungsi kontinyu ketika $T_0 \rightarrow \infty$. Ketika T_0 bernilai sangat besar, $T_0 \rightarrow \infty$, maka koefisien Fourier dinyatakan dengan,

$$T_0 a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad \text{.......(28)}$$

Dengan $X(\omega)=T_0 a_k$ dan $\omega=k\,\omega_0$ maka persamaan menjadi,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\omega t} dt \qquad \text{.......(29)}$$



Gambar 6. Fungsi Aperiodis dan Fungsi Periodis. (a) fungsi aperiodis, (b) fungsi periodis dengan periode T_0

Sebagaimana terlihat pada Gambar 6, Fungsi Aperiodis dapat dilihat sebagai fungsi periodis dengan $T_0 \rightarrow \infty$. Diketahui bahwa

$$T_0 = 2\pi / \omega_0, \quad dan \quad \omega = k\omega_0$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) = \frac{1}{T_0} X(\omega)$$

Maka persamaan (25) menjadi,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(\omega) e^{j\omega t}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} \omega_0 \qquad \text{.......(30)}$$

Ketika $T_0 \rightarrow \infty$, sehingga $\omega_0 \rightarrow d\omega$. Dengan demikian persamaan (30) menjadi berbentuk integral,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$ ....(31)

Persamaan pasangan Transformasi Fourier adalah,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\omega t}dt$$ ....(32)

Contoh 3:

Terdapat isyarat kotak dengan persamaan sebagai berikut,

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

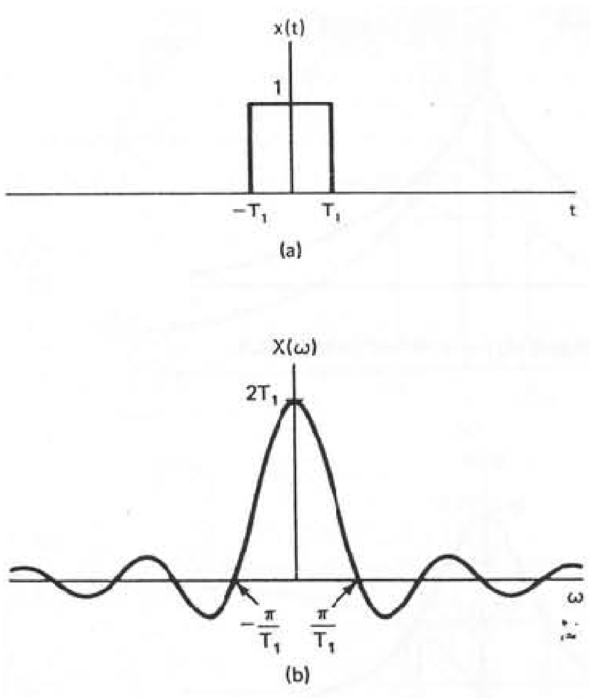
Tentukan Trnasformasi Fourier dari isyarat tersebut.

Jawab:

Transformasi Fourier dapat ditentukan dengan persamaan (32), sehingga ditemukan

$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t}\, dt = 2\frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$

Hasilnya dapat dilihat seperti pada Gambar 7.



Gambar 7. Isyarat Kotak dan Transformasi Fourier-nya.

Contoh 4:

Ketika sebuah isyarat x(t) mempunyai Transformasi Fourier sebagai berikut,

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

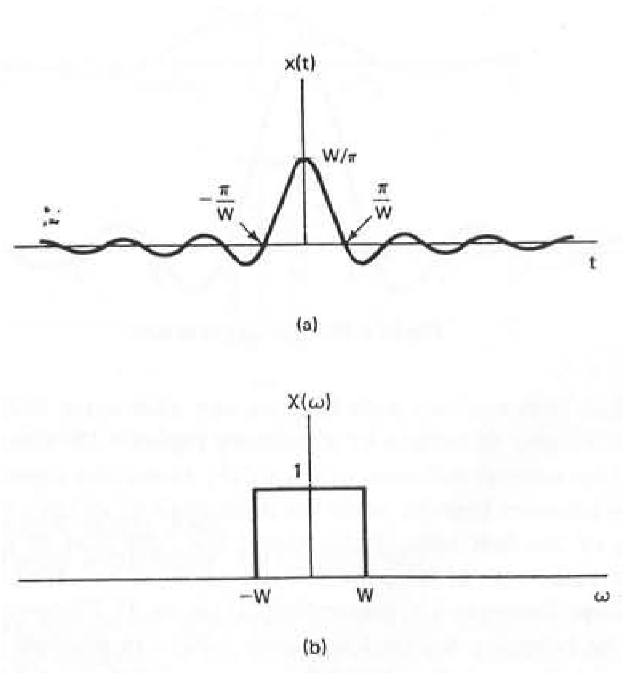
Carilah persamaan isyarat tersebut,

Jawab:

dengan persamaan (32) isyarat x(t) dapat ditemukan

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

Isyarat x(t) dan Kawasan Frekuensinya terlihat seperti pada Gambar 8.



Gambar 8. Pasangan Transformasi Fourier dalam contoh 4.

1.2.2 Transformasi Fourier untuk isyarat diskret

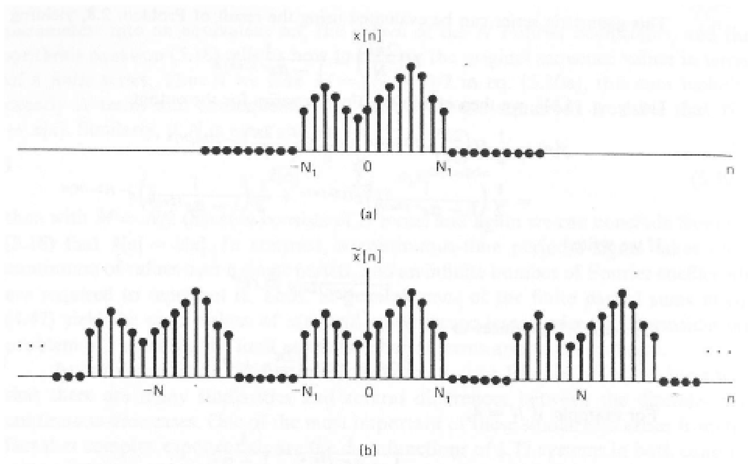
Sebagaimana pada isyarat kontinyu aperiodis, isyarat diskret apriodis juga dapat dipertimbangkan sebagai isyarat diskret periodis dengan periode tak terhingga. Ketika periode isyarat semakin besar dan semakin besar, maka deret Fourier akan semakin mendekati menjadi Transformasi Fourier.

Ketika sebuah runtun isyarat aperiodis x[n] yang mempunyai durasi tertentu. Katakanlah N_1, sehingga $x[n]=0$ jika $|n|>N_1$. Gambar 9(a) adalah sebuah ilustrasi isyarat ini. Dari isyarat aperiodis ini dapat direkayasa sebuah runtun periodis yang diperhitungkan untuk hanya periode pertama, sebagaimana digambarkan pada Gambar 9(b). Ketika periode *N* membesar, maka x[n] menjadi mendekati tak periodis. Ketika N→∞, maka *x[n]* menjadi tak periodis.

Persamaan dalam bentuk Deret Fourier untuk isyarat periodis, Gambar 9(b), diketahui dari persamaan (23) sebagai berikut,

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k . e^{jkn(2\pi/N)}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] . e^{-jkn(2\pi/N)} \quad ......(33)$$



Gambar 9. Fungsi Aperiodis dan Fungsi Periodis.

(a) fungsi aperiodis,

(b) fungsi periodis dengan periode T_0

Untuk N→∞, maka

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{N=-\infty}^{+\infty} x[n].e^{-jkn(2\pi/N)}$$

$$a_k N = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} x[n].e^{-jkn(2\pi/N)}$$

Jika *envelope* didefinisikan $X(\omega)=a_k N$, maka persamaan menjadi,

$$X(\omega) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} x[n].e^{-jkn(2\pi/N)} \qquad \text{...(34)}$$

Terlihat pada Gambar 9, fungsi aperiodis diskret dapat dilihat sebagai fungsi periodis dengan $N \rightarrow \infty$. Diketahui bahwa

$$N = 2\pi/\omega_0, \quad dan \quad \omega = k\omega_0$$

$$a_k = \frac{1}{N}X(k\omega_0) = \frac{1}{N}X(\omega)$$

Maka persamaan (33) dan (34) menjadi,

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} X(k\omega_0).e^{jk\omega_0 n}$$

$$X(\omega) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} x[n].e^{-jkn\omega_0} \qquad \text{..(35)}$$

Diketahui bahwa $\omega_0 = 2\pi/N$, sehingga $1/N=\omega_0/2\pi$, persamaan (35) dapat dituliskan kembali menjadi,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X(k\omega_0).e^{jk\omega_0 n}.\omega_0$$

$$X(\omega) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} x[n].e^{-jkn\omega_0} \qquad \text{..(36)}$$

Ketika $N \rightarrow \infty$, maka $\omega_0 \rightarrow d\omega$, dan $\omega = k\omega_0$. Persamaan (36) membentuk persamaan pasangan Transformasi Fourier sebagai berikut,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega).e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(\omega) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} x[n].e^{-jn\omega} \qquad \text{..(37)}$$

Di sini tampak bahwa $X(\omega)e^{j\omega n}$ adalah periodis dengan periode 2π.

Contoh 5:

Sebuah isyarat diskret kotak mempunyai persamaan sebagai berikut,

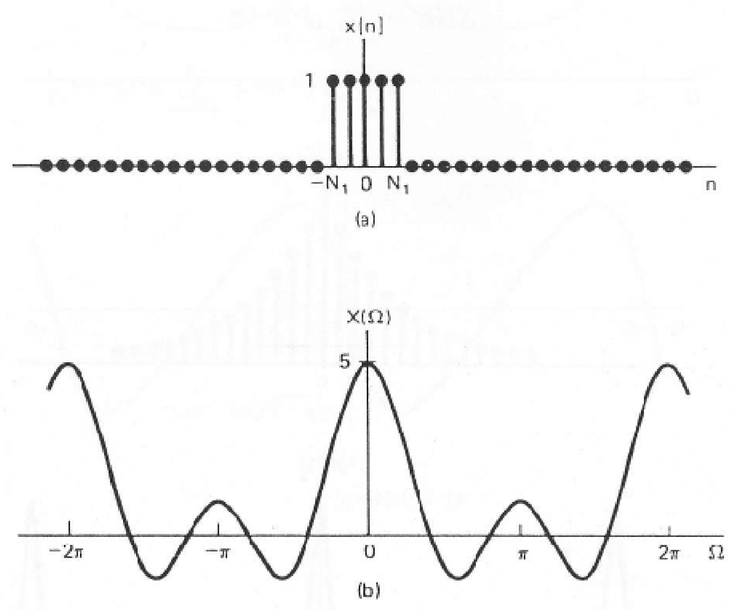
$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

Dengan $N_1 = 2$. Tentukan Transformasi Fourier isyarat tersebut.

Jawab:

Dengan $N_1 = 2$, $X(\omega)$ dapat dicari yaitu,

$$X(\omega) = \sum_{N=-2}^{+2} e^{-jn\omega} = e^{j2\omega} + e^{j\omega} + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}$$



1.3 Transformasi Fourier Diskret (DFT)

Analisis Fourier merupakan metode yang sangat efisien untuk untuk analisis dan sintesis sinyal. metode ini sangat erat cocok untuk digunakan pada komputer digital atau untuk implementasi di hardware digital. Transformasi Fourier Diskret (DFT, *Discrete Fourier Transform*) digunakan untuk sinyal durasi berhingga.

Misal *x[n]* adalah sebuah sinyal dengan durasi terbatas; dan integer *N* sehingga

x[n] = 0 untuk x[n] diluar interval $0 \le n \le N$ ....(38)

Asumsikan bahwa *x[n]* periodis dengan periode N, dari (23) koefisien Fourier diperoleh dengan

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n].e^{-jkn(2\pi/N)}$$

Menjadi

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n].e^{-jkn(2\pi/N)} \quad \text{...(39)}$$

Koefisien-koefisien dari persamaan di atas adalah DFT dari x[n]. Dengan demikian, isyarat diskret *x[n]* tak periodis dengan panjang N dapat diasumsikan sebagai isyarat periodis dengan periode N. Dari (39) Transformasi Fourier Diskret adalah,

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n].e^{-jkn(2\pi/N)} \quad \text{...(39)}$$

Persamaan (39) disebut dengan Transformasi Fourier Diskret (DFT, *Discrete Fourier Transform*). Ketika *x[n]* dianggap periodis dengan periode N, dari (23) isyarat tersebut dibentuk dari koefisien-koefisien Fourier sebagai berikut,

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k.e^{jkn(2\pi/N)} \\ x[n] &= \sum_{n=0}^{N-1} X(k).e^{jkn(2\pi/N)} \end{aligned} \quad \text{...(40)}$$

Persamaan (40) disebut dengan Transformasi Fourier Diskret Balik (IDFT, *Inverse Discrete Fourier Transform*).

Persamaan (39) dan (40) membentuk pasangan Transformasi Fourier Diskret (DFT), yaitu,

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n].e^{-jkn(2\pi/N)} \\ x[n] &= \sum_{n=0}^{N-1} X(k).e^{jkn(2\pi/N)} \end{aligned} \quad \text{...(41)}$$